Chapitre 2 O1 Ensemble synthèse

Définition : Un ensemble E est une collection d'éléments. On note $x \in E$ si x est un élément de E.

Remarque : On peut définir un ensemble par liste exhaustive ou par la caractérisation.

Définition : Deux ensembles E et F sont égaux ($E = F$) si E et F contiennent exactement les mêmes éléments.

Convention : Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, l'ensemble vide ($\emptyset$).

Définition : Soient A et E deux ensembles. A est inclus dans E ou que A est un sous-ensemble de E ou que A est une partie de E ($A \subset E$) si tout élément de A est un élément de E.

Méthode : Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble E, on pose un élément quelconque de A ("Soit $x \in A$) et on montre qu'il appartient à E ("...alors $x \in E$).

Propriété : Soit A, B, C trois ensembles. Si $A \subset B$ et si $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Définition : Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarques :
— $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
— NPC les symboles $\in$ et $\subset$.

Théorème : Soient E et F deux ensembles. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Méthode : Pour montrer que deux ensembles sont égaux on procède par "double inclusion" en montrant que E est inclus dans F puis que F est inclus dans E.

Définition : L'union des ensembles A et B est définie par par $A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Définition : L'intersection des ensembles A et B par $A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}$

Définition A et B sont deux ensembles disjoints si leur intersection est vide.

Propriétés : Soient A, B et C trois parties de E.

1. $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   On dit que l'union et l'intersection sont associatives.
2. $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
   On dit que l'union et l'intersection sont commutatives.

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   On dit que l'union est distributive par rapport à l'intersection et que l'intersection est distributive par rapport à l'union.
4. Si A est inclus dans B alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$.

Définition : Soit n un entier positif et $(A_k)_{k\in[|1;n|]}$ une suite de sous-ensembles de E.

1. La réunion des ensembles A_k est l'ensemble des éléments appartenant à au moins l'un des ensembles A_1, A_2, ..., A_k. On note cet ensemble $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.
2. L'intersection des ensembles A_k est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les ensembles A_k. On note cet ensemble $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$

Définition : Pour toute partie A de E, le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Propriétés :
— $\overline{E} = \emptyset$.
— $\overline{\overline{A}} = A$.
— $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
— $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Définition : Soient A et B deux parties de E. L'ensemble $A \setminus B$, appelé A privé de B, est défini par $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Définition : Soit n un entier naturel. On appelle système complet de parties de E toute famille $(A_k)_{k\in[|1;n|]}$ de parties de E telle que :
— $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$
— pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[|1; n|]$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Définition : Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F est $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

Remarques :
— NPC (x, y) et $\{x, y\}$.
— $E \times E = E^2$.
— $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n), x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n\}$.
$E \times E \times \ldots \times E = E^n$.

symboles	signification
$\exists$	il existe
$\exists!$	il existe un unique
$\forall$	pour tout