Chapitre 7 : Dérivées et primitives

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle réel non réduit à un point, $\mathcal{P}$ désigne un plan orienté muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

I Interprétations géométriques de la dérivée

Nous n'avons pas encore les outils nous permettant de définir rigoureusement la notion de dérivée. Nous allons donc dans un premier temps nous contenter d'en donner une approche géométrique et concrète.

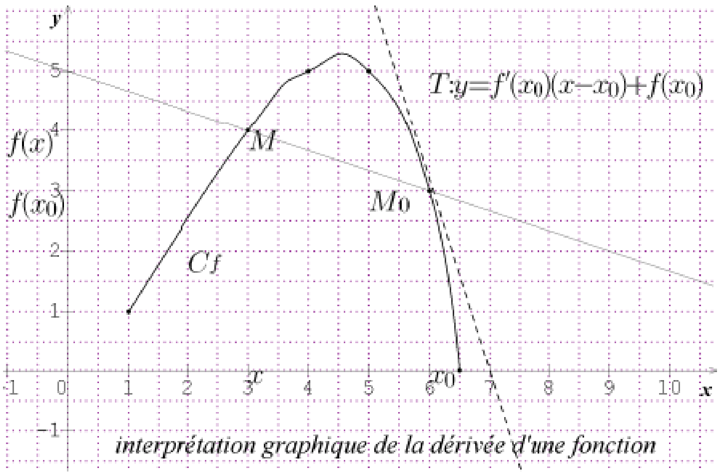
Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un élément de I.

On note C la courbe représentative de f dans le plan $\mathcal{P}$, M_0 le point de C d'abscisse x_0. soit M un point quelconque de C distinct de M_0 et d'abscisse x.

La droite (MM_0) a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. La quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ s'appelle le taux d'accroissement de f en x_0.

Si on fait tendre x vers x_0, c'est à dire si graphiquement x se rapproche de x_0, la droite (MM_0) peut tendre, sous certaines conditions, vers une "droite limite" qui est appelée la tangente T à la courbe C en x_0.

On dit alors que f est dérivable en x_0 et on note $f'(x_0)$ le coefficient directeur de la droite limite obtenu. Le nombre $f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivée de f en x_0.



Propriété : : La tangente T à la courbe C de f lorsque f est dérivable en x_0 admet pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

<u>Démonstration :</u>Si f est dérivable en x_0, alors par définition, T existe et a pour coefficient directeur $f'(x_0)$.

Donc l'équation de la droite T s'écrit $y = f'(x_0)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Comme T passe par le point M_0, les coordonnées de M_0 vérifient l'équation de la droite T. Ces coordonnées sont $(x_0, f(x_0))$. On a donc : $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$.

On en déduit que $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Il ne reste plus qu'à remplacer b par son expression dans l'équation de T, puis de factoriser par $f'(x_0)$ et on obtient alors en effet : $T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Définition : Dans le cas où la courbe admet des demi-tangentes à gauche (resp. à droite), on dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) et le coefficient directeur de cette droite noté $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$) est le nombre dérivée de f à gauche (resp. à droite) en x_0.

Définition :

La fonction f est dérivable sur I si f est définie sur I et dérivable en tout point $x_0 \in I$.

On appelle alors fonction dérivée de f et on note f' ou $\frac{df}{dx}$ la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x, $f'(x)$.

Exemple :

Si f est la fonction constante sur I alors pour tout x dans I, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

Si f est la fonction identité, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 1$.

Retrouver graphiquement l'expression de la dérivée de f dans le cas où f est une fonction affine et dans le cas où f est la fonction valeur absolue.

II. Dérivées des fonctions usuelles (admises pour l'instant)

Nous admettrons que les fonctions f qui suivent sont dérivable sur l'intervalle I précisé dans chaque cas et nous admettrons l'expression leur dérivées. Tous ces résultats seront démontrés dans le chapitre "dérivabilité".

$f(x)$	$f'(x)$	I
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x, $a > 0$	$\ln(a) \times a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$ ou $\frac{1}{cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

III Propriété d'opération sur les dérivées

3.1 Dérivées et opérations

Nous admettrons également temporairement les formules de dérivations des opérations qui suivent :

Propriété : Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et λ un réel.

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
2. fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
4. si de plus g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{(g^2)}$ et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-g'f}{(g^2)}$

Exemple :Retrouver les deux expressions de la dérivée de la fonction tangente à l'aide de ces formules.

Remarque :Attention aux notations ! f' est une notation correcte mais $f(x)'$ n'a aucun sens car on peut dériver une fonction mais pas un nombre.

Propriété :(Composition de fonctions dérivables)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J.

On suppose $f(I) \subset J$.

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

Exemple :Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt{(6x^2 + 3)}$ sur R après avoir justifier la dérivabilité.

Exprimer les dérivées de e^u, $\ln(u)$, $\sqrt{u}$, $\frac{1}{u}$, u^n, $\sin(u)$, $\cos(u)$, $\arctan(u)$ avec u une fonction dérivable sur son ensemble de définition et à valeurs dans l'ensemble adéquat à chaque cas.

Propriété :(Dérivée d'une réciproque)

Soit f une fonction bijective sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur $J = f(I)$, la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Exemple :A l'aide de cette propriété et en utilisant les fonctions réciproques adaptées, démontrer l'expression des dérivées des fonctions ln, racine carrée, et arctan.

IV Dérivation et sens de variation

La notion de dérivée est particulièrement efficace pour déterminer le sens de variation d'une fonction. En effet :

Propriété :(admise) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. La fonction f est croissante sur I si seulement si f' est positive ou nulle.
2. La fonction f est décroissante sur I si seulement si f' est négative ou nulle.
3. La fonction f est constante sur I si seulement si f' est nulle.

Remarque : : Attention dans cette propriété, ce qui nous intéresse c'est le signe de la dérivée de f et le sens de variation de f. Il ne faut pas confondre "signe" et "sens de variation".

Propriété : Si f est une fonction dérivable sur I et si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Remarque :la réciproque est fausse en général. Un contre-exemple est la fonction ....