DM - Fonctions solutions d'une équation différentielle d'ordre 1

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) d'inconnue $f : (1 + x^2)f' + 2xf = 0$.
- (b) On pose $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
- (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ .
- (d) Montrer que φ est deux fois dérivable et que $\varphi''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ pour tout x réel.
- (e) Déterminer la valeur positive a pour laquelle $\varphi''(a) = 0$ et déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse a .
- (f) (difficile) Étudier la position relative de la courbe C et de la tangente T .
- (g) Tracer l'allure de la courbe C .
2. Dans cette partie, on désire résoudre l'équation $(E_2) : xy' + y = \varphi(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
 - (a) Résoudre l'équation homogène associée à (E_2) .
 - (b) On pose $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 - i. Montrer que pour tout x réel $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$ avec g une fonction à déterminer.
 - ii. Étudier le signe de g et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - iii. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$
 - iv. (difficile) En déduire que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est égale à 1.
 - v. Montrer que f est une solution particulière de (E_2) .
 - (c) Résoudre complètement l'équation (E_2) .