DM 4 (Polynômes de Tchebychev)

On définit une suite de polynôme (T_n) en posant :

$$T_0 = 1, T_1 = X et T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. Montrer que $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
3. Déterminer la factorisation de T_4 dans $\mathbb{R}[X]$
4. (a) Conjecturer le degré de T_n et son coefficient dominant pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Démontrer cette conjecture.
5. Montrer que $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
6. En déduire que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta), \forall n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une démonstration par récurrence.
7. On cherche les racines de T_n dans $[-1; 1]$.
   (a) Résoudre l'équation $\cos(n\theta)) = 0$.
   (b) En déduire les solutions de $T_n(x) = 0$ dans $[-1; 1]$ en posant $x = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0; \pi]$.
   (c) En déduire la factorisation de $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (d) En utilisant ce résultat pour $n = 4$, en déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{8})$.