DM 5 (d'après EDHEC 2001)

1. On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   (a) Montrer que : $\forall k > 1, \quad \dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$.

2. On considère une suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

   (a) i. Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

   ii. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   (b) i. Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.

   ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

   iii. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite u.

   (c) i. A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

   ii. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

   iii. En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

   iv. Écrire une fonction en PYTHON permettant de calculer et d'afficher u_n en prenant comme argument n.