DS 3 (durée 3h30)

Le sujet comporte trois pages, cinq exercices. Les exercices sont deux à deux indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenées à effectuer.

Exercice 1 (Étude d'une application - 8 points)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant, en fonction de la valeur de λ :
2. $\begin{cases} (2-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ x + (3-\lambda)y + z = 0 \\ x + 2y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$
3. On définit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (2x+2y+z; x+3y+z; x+2y+2z) \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

   (a) L'application f est-elle injective ?

   (b) l'application f est-elle surjective ?

   (c) L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 2 (Équation différentielle du premier ordre - 12 points)

1. On pose $h(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

   (b) Dresser le tableau de variation de h.

   (c) Déterminer une primitive de h en utilisant une primitive par partie.

2. On pose $(E) : y'(x) + \frac{e^x}{1+e^x} y(x) = x$.

   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E).

   (b) On pose $y_0(x) = \frac{1}{1+e^x} C(x), \forall x \in \mathbb{R}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que y_0 est une solution particulière de (E) ssi $C'(x) = x + xe^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) En déduire l'expression de C pour que y_0 soit une solution particulière de (E).

   (d) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

3. Soit F l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   On pose $\varphi : F \longrightarrow G$ l'application qui à toute fonction f de F associe une fonction $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = (1+e^{-x})f'(x) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\varphi(f + \lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$ pour toutes fonctions f, g dans F et tout réel λ.

   (b) Déterminer le ou les antécédents de la fonction nulle par φ.

   (c) φ est-elle injective ?

Exercice 3 (Circulation de crevettes - 11 points)

Afin d'étudier l'influence du milieu sur la circulation des crevettes, un groupe de TIPE a confectionné un aquarium séparé en deux compartiments. Dans un des compartiments (noté A) est créé un fort courant à l'aide d'une pale actionnée par un moteur. Dans l'autre compartiment (noté B), l'eau est stagnante. Un passage est aménagé entre les deux parties, assez large pour permettre la circulation des crevettes.

A l'instant $t = 0$, 10 crevettes identiques sont placées dans le compartiment A.

On compte le nombre de crevettes présentes dans le compartiment B lors de 7 mesures à intervalle régulier.

On suppose qu'à chaque instant, il peut y avoir de 0 à 10 crevettes dans le compartiment B.

On appelle résultat, l'ensemble des mesures effectuées lors des 7 instants consécutifs (de $t = 1$ à $t = 7$).

Déterminer le nombre de résultats possible :

1. Au total.
2. Avec 0 crevettes lors de la dernière mesure.
3. Avec un nombre différent de crevettes à chaque mesure.
4. Avec un nombre strictement croissant de crevette lors des mesures.
5. Avec 0 ou 1 crevette à chaque mesure.
6. Avec au moins une fois 0 crevette.
7. Avec exactement quatre fois 0 crevette.
8. Avec au plus 2 crevettes dans chacune des trois premières mesures.
9. Avec 2 crevettes lors de deux instants, 6 crevettes lors de deux autres instants, et 0 crevettes lors des trois autres instants.
10. (a) (question préliminaire) Combien y a-t-il de façons d'aligner 6 boules blanches identiques et 6 boules noires identiques ?

    (b) En déduire le nombre de résultats dans lesquels 6 crevettes ont été compté en tout au cours des 7 mesures.

Exercice 4 (Équation du pendule - 6 points)

Un pendule simple est constitué d'une masse m assimilée à une masse ponctuelle suspendue à un point A par un fil inextensible, considéré sans masse et de longueur L. A est choisi comme origine le long de l'axe vertical Az.

On note g l'accélération de la pesanteur (g est une constante strictement positive).

La position du pendule est repérée par l'angle θ (compris entre $-\pi$ et $+\pi$) entre le fil et la verticale. A l'instant initial, $t = 0$, on suppose que le pendule est lâché avec une vitesse angulaire initiale $\theta'(0) = \frac{\sqrt{g}}{100\sqrt{L}}$ depuis un angle initial $\theta(0) = \frac{1}{100}$.

1. Représenter un schéma du dispositif décrit à $t = 0$.
2. L'équation caractérisant l'évolution de l'angle θ au cours du temps, dans le cas de petites oscillations, est donnée par
   $$(E_s) : \theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$
   (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation E_s.

   (b) En utilisant les conditions initiales, montrer que l'expression de θ est donnée par : $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \forall t \in \mathbb{R}_+$ avec A, ω_0, φ trois constantes à déterminer.

(c) Donner l'allure de la représentation graphique de θ (aucune étude de fonction n'est attendue).

3. On se place à présent dans le cas où le pendule subit un frottement visqueux. L'équation devient alors

$$(E_f) : \theta''(t) + 2\lambda\omega_0\theta'(t) + {\omega_0}^2\theta(t) = 0$$

où $\lambda \in [0; 1]$.

(a) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_f).

(b) Donner l'allure de la courbe de θ (sans étude de fonction).

Exercice 5 (Pierre-papier-ciseaux) - 6 points)

On souhaite modéliser un jeu de Pierre-Papier-Ciseaux où l'utilisateur joue contre l'ordinateur.

La règle est la suivante : le papier l'emporte sur la pierre, les ciseaux l'emporte sur le papier et la pierre l'emporte sur les ciseaux.

On décide de représenter le choix de la pierre (respectivement du papier, respectivement des ciseaux) par l'entier 0 (respectivement 1, respectivement 2).

1. Écrire une fonction *partie* qui prend en argument deux entiers x et y compris entre 0 et 2 et qui renvoit P (pour perdu) lorsque la valeur de y l'emporte et G (pour gagner) lorsque la valeur de x l'emporte (en suivant la règle donnée en introduction).

2. Écrire une procédure *jeu* qui prend en argument le nombre n de parties à réalisées au maximum (fixé par défaut à 10).

   Cette procédure réalise n parties en suivant les étapes suivantes :

   — Elle demande à l'utilisateur d'entrer un entier entre 0 et 2.
   — Elle génère un nombre aléatoire entre 0 et 2 (utiliser la fonction randrange du module random).
   — Elle détermine qui du joueur ou de l'ordinateur a gagné la partie et l'indique au joueur avant de lui redemander de jouer.
   — A la fin des n parties, elle renvoit le nombre de parties gagnées par le joueur.