DS 4 (durée 3h30)

Le sujet comporte trois pages et un problème. Le problème se décompose en 5 parties. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-la sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème

1. Partie 1 : Dénombrement

   Soit $n \in \mathbb{N}*$ et $p \in \mathbb{N}*$. On note E l'ensemble des matrices de taille $n \times n$.

   (a) Combien de matrices de E contiennent tous les entiers de 1 à n^2 ?

   (b) Combien de matrices de E contiennent deux coefficients égaux à 1 sur la même ligne, tous les autres coefficients étant nuls ?

   (c) Combien de matrices de E contiennent tous les entiers de 1 à n et des zéros partout ailleurs ?

   (d) Combien de matrices avec un seul coefficient égal à 1 sur chaque ligne et chaque colonne, les autres coefficients étant nuls ?

2. Partie 2 : Étude d'un ensemble de matrices

   On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   On pose également $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = aI + bJ + cK\}$

   (a) Calculer J^2, K^2, JK et KJ.

   (b) Déterminer si J et K sont inversibles et donner leur inverse le cas échéant.

   (c) Montrer que $\forall (A, B) \in F^2$:

      i. $A + B \in F$

      ii. $AB \in F$

      iii. ${}^tA \in F$

      iv. $A^k \in F, \forall k \in \mathbb{N}$

3. Partie 2 : Étude d'un élément de F.

   On pose $H = 2I + J + L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) i. Montrer que 1 est racine double du polynôme $Q(X) = X^3 - 6X^2 + 9X^1 - 4X^0$. En déduire la factorisation de Q.

      ii. Calculer $Q(H)$. En déduire que H est inversible et son inverse.

   Dans la suite, on détermine, par trois méthodes différentes, l'expression de $H^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Première méthode :

i. Déterminer deux réels α et β tels que $H^2 = \alpha H + \beta I$.

ii. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe deux réels α_k et β_k tels que $H^k = \alpha_k H + \beta_k I$. On exprimera α_{k+1} et β_{k+1} en fonction de α_k et β_k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

iii. On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et $b_n = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

A. Montrer que (b_n) est une suite géométrique et en déduire son terme général.

B. En déduire le terme général de la suite (a_n).

C. Retrouver le résultat précédent en étudiant directement la suite (a_n).

iv. Déterminer le terme général des suites (α_k) et (β_k) et en déduire l'expression de $H^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

(c) Deuxième méthode

i. On pose $U = I + J + K$. Calculer $U^k, \forall k \in \mathbb{N}$ par récurrence.

ii. Écrire H en fonction de U et en déduire $H^k, \forall k \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

(d) Troisième méthode. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Montrer, à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, que P est inversible et l'expression de P^{-1}.

ii. Calculer $D = P^{-1}HP$. On vérifiera que D est une matrice diagonale.

iii. Montrer que $D^k = P^{-1}H^kP, \forall k \in \mathbb{N}$.

iv. En déduire $H^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

4. Partie 4 : Une application. On considère un système constitué de 3 récipients A, B, C. Chaque récipient est relié aux deux autres par un tuyau d'arrivée et un tuyau de départ. A l'instant initial $n = 0$, A contient 3L d'eau, B contient 2L d'eau et C contient 1L d'eau. A chaque minute et pour chaque récipient, la moitié du contenu est conservé dans le récipient tandis qu'un quart du contenu est transféré dans chacun des deux autres récipients.

On note a_n le contenu de A, b_n le contenu de B et c_n le contenu de C en litre, au bout de n minutes.

(a) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n pour tout n entier naturel.

(b) On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe λ un réel tel que $X_{n+1} = \lambda H X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que $X_n = (\lambda H)^n X_0, \forall n \in \mathbb{N}$ (attention, (X_n) n'est pas une suite numérique).

(d) En déduire l'expression de X_n pour tout entier n.

5. Partie 5 : Informatique.

Dans cette partie, on modélisera une matrice A par la liste des listes des coefficients en ligne. Ainsi la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sera codée $A = [[1, 2], [3, 4]]$ et l'instruction $A[i][j]$ permet d'extraire le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne.

(a) Le programme suivant code une fonction *affiche* qui permet d'afficher une liste de listes sous la forme habituelle d'une matrice. Associer à chaque numéro un mot parmi la liste suivante : affiche, if, return, print, input, int, while, for, def, len, (attention un même mot peut être utilisé plusieurs fois et tous les mots ne servent pas).

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$(A)

    n=$\boxed{3}$(A)
    p=$\boxed{4}$(A[0])
    i=0
    $\boxed{5}$ i in range(0,n) :

        j=0
        $\boxed{6}$ j<p

            $\boxed{7}$(A[i][j], end=" ")
            j+=1

        $\boxed{8}$(end=" \ ")

De plus ce programme contient deux erreurs de syntaxe classiques. Lesquelles ?

(b) Écrire une fonction *somme* qui prend en argument deux matrices A et B et qui renvoie leur somme (que l'on suppose de même taille).

(c) Dans le programme *somme*, on souhaite ajouter une instruction permettant de vérifier que l'on peut calculer le produit (sinon, la fonction renvoie une liste vide). Écrire cette instruction. Entre quelles lignes doit-on l'insérer ?

(d) Écrire une fonction *appartient* qui prend en argument une matrice A et qui vérifie si A est de la forme $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels.

(e) Écrire une fonction *suite*1 qui prend en argument un entier n et qui renvoie le terme b_n de la suite (b_n) définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(f) Écrire une fonction *suite*2 qui prend en argument un entier n et qui renvoie le terme a_n de la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.