

Exercices : Applications

Exercice 1 :

Tracer la courbe représentative d'une fonction f définie de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ dans chacun des cas suivants : a) f est ni injective, ni surjective, b) f est injective mais non surjective, c) f est surjective mais non injective, d) f est bijective.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3 : Les applications suivantes définies de D dans $\mathbb{R}$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. f définie par $f(x) = 6x - 2, \forall x \in D = [2; 5]$;
2. g définie par $g(x) = 3x + 5, \forall x \in D = \mathbb{R}$
3. h définie par $h(x) = 2x + 1, \forall x < 0$ et $h(x) = 4x - 2, \forall x \geq 0$
4. r définie par $r(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$ et $r(0) = 0$.

Exercice 4 :

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, définie par $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $f(x, y, z) = (x + y - z; 2x - y - 2z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. On note E l'ensemble des polynômes de degré 2 et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(P) = P(1), \forall P \in E$.
4. On note E l'ensemble des polynômes de degré 2 et $f : E \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0)), \forall P \in E$.

Exercice 5 : Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (2x - y, x - 5y).$$

1. Déterminer le ou les antécédent(s) par g de $(5, -4)$.
2. Montrer que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \exists ! (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (u, v)$.
3. Que peut-on en déduire sur la fonction g ?

Exercice 6 : Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 7 Montrer que la composée de deux injections est une injection et que la composée de deux surjections est une surjection.

Exercice 8 : Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications. Montrer que si $g \circ f = Id_E$, alors g est surjective et f est injective.