Chapitre 6 Nombres Complexes Synthèse

Définition :
$\mathbb{C} = \{z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.
Le réel a est la partie réelle de z, noté $\mathcal{R}e(z)$
Le réel b est la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$.

Propriétés :

1. (a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')
2. (a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)

Propriété : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Définition : Si $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\overline{z} = a - ib$ est le conjugué de z.

Propriétés :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
4. z est un réel si et seulement s'il est égal à son conjugué
5. z est un imaginaire pur si et seulement s'il est l'opposé de son conjugué.
6. $z + \overline{z'}$ est un réel. Plus précisément, $z + \overline{z'} = 2\mathcal{R}e(z)$.
7. $z - \overline{z'}$ est un imaginaire pur. Plus précisément, $z - \overline{z'} = 2i\mathcal{I}m(z)$.
8. $z\overline{z}$ est un réel. Plus précisément, $z\overline{z} = \mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2$
9. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mathcal{R}e(z)^2+\mathcal{I}m(z)^2}$

Définition : Si $z = a+ib, (a, b \in \mathbb{R}^2$, alors le module de z est défini par $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z, z' et tout réel λ, on a

1. $|z| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $z = 0$
2. $|\lambda z| = |\lambda||z|$
3. $\mathcal{R}e(z) \leq |z|$ et $\mathcal{I}m(z) \leq |z|$.
4. $|z| = |\overline{z}|$
5. $z\overline{z} = |z|^2$ et si $z \neq 0$ on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
6. $|zz'| = |z||z'|$
7. Si z' est non nul, $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
8. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Définition : Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe ramené au repère $(o, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit z un complexe non nul dont l'image ponctuelle dans le plan complexe est le point M. Toute mesure d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}})$ est un argument du complexe z. Si a est un argument de z, on le note $a = arg(z)$.

L'argument de z compris dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'appelle l'argument principal de z.

Définition : Soit z un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ. On a alors $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ (forme trigonométrique de z).

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul qui a pour forme algébrique $z = a + ib$ et pour forme trigonométrique $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Alors :

1. $\mathcal{R}e(z) = a = \rho\cos(\theta)$ et $\mathcal{I}m(z) = a = \rho\sin(\theta)$
2. $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application : Soit x et y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Propriété : deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π.

Propriété : Si $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = \rho'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$, alors :
$zz' = \rho\rho'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$

Propriété : Pour tous complexes z et z' et tout entier relatif n :

1. $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$
2. $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$
3. $arg(z^n) \equiv narg(z)[2\pi]$
4. $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$
5. $arg(\frac{1}{z}) \equiv arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$

Définition : $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), x \in \mathbb{R}$ (exponentielle complexe).

Propriété : Si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$, alors :

1. $zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
2. $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

Propriété (formule de Moivre) :
$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Propriété (Formules d'Euler) :
$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \theta \in \mathbb{R}$