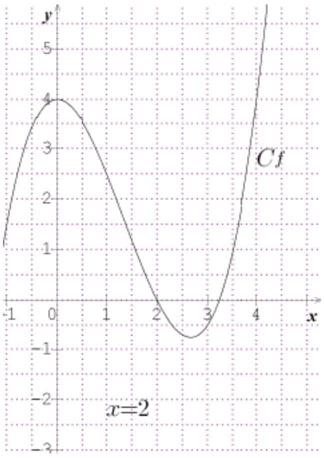
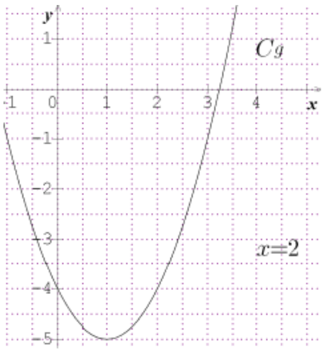
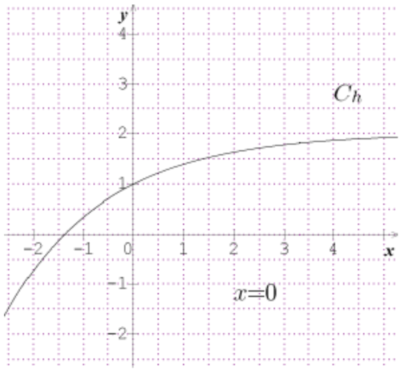
Exercices : dérivées et primitives

Exercice 1 :

Déterminer graphiquement une valeur approchée de la dérivée en x pour chacune des fonctions suivante (définie par leur courbe respective C_f, C_g, C_h) :







Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer l'ensemble de dérivation et calculer la dérivée :

$f(x) = x^6 + 3x^2 + 2$; $f(x) = \frac{e^{3x}-4}{e^x+2x}$; $f(x) = (2x+3)^2$; $f(x) = (\frac{x+1}{x+2})^3$; $f(x) = \sin^2(3x-2)$

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+2}}$; $f(t) = t\sqrt{t^2+1}$; $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{(3x+1)^3}$; $f(u) = \frac{1}{u} - \ln(1+\frac{1}{u})$; $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$

$f(v) = \ln(\frac{v+1}{1-v})$; $f(x) = (x^2-2x)e^x$; $f(x) = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$; $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$;

$f(x) = x^x$; $f(s) = e^{\frac{1+s}{1-s}}$; $f(t) = \arctan(\frac{1}{1+x})$; $f(x) = \sqrt{\mid 1-x^2 \mid}$; $f(t) = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$

Exercice 3 :

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive :

$f(t) = t$; $f(t) = \cos(t)$; $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{x^2}$; $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$; $f(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$; $f(t) = te^{t^2}$; $f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$;

$f(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$; $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f(x) = \cos(x)\sin(x)$; $f(x) = 4x\sin(x^2)$; $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 4 :

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
3. Montrer que g est dérivable sur I et déterminer g' à l'aide du résultat précédent.
4. Retrouver la valeur de g' en explicitant g.

Exercice 5 :

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$
2. Montrer l'inégalité : $\forall x \in [-1, +\infty[, 0 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$

Exercice 6 :
Étudier les variations de la fonction f définie par
$f(x) = xe^x, \forall x \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1)}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*$.

Exercice 7 :
Montrer que $\forall t \in]0;1[, \ln(t)\ln(1-t) \leq (\ln(2))^2$.

Exercice 8 : Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leq x$.