

Exercices : Equations différentielles

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' + 5y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y' + (t^2 - 2t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. $y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. $t(\ln(t))y' + y = 0$ sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Peut-on trouver une solution dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?
6. $(1 + t^2)y' + 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
7. $(1 + t^2)y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(1) = \pi$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 5y' - 4y = 0$
2. $y'' + y' + 3y = 0$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + 4y = 0$
5. $xy'' + y' = 0$

Exercice 3 :

1. Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$ et en cherchant une équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(e^t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ en posant $z = x^2y$.

Exercice 4 :

Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.

Exercice 5

Intégrer les équations différentielles avec second membre suivantes :

1. $y' + y = 1$
2. $y' \sin(x) - y \cos(x) + 1 = 0$ sur $]0; \pi[$
3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$
4. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$ (chercher la solution sous la forme Ce^{-t}).
5. $y'' + 2y' + y = xe^x$ (chercher la solution sous la forme $(a + bx)e^x$)
6. $y'' + a^2y = -2$
7. $y'' + 3y' + 2y = (x - 1)e^{-x}$ (chercher la solution sous la forme $(a + bx + cx^2)e^{-x}$)

Exercice 6 Dissolution d'une substance

Une substance se dissout dans l'eau.

On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute. À l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, donner une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t .

Exercice 7 Plante envahissante

Dans un étang, on note y la surface, en m^2 , occupée par de la jussie, plante aquatique envahissante. On suppose que la vitesse d'évolution de y est proportionnelle à y . On a mesuré qu'en dix ans, la surface avait doublé. Combien de temps lui faudra-t-il pour tripler ?

Exercice 8 Vitesse d'un parachutiste

Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 ms^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t .

On admet que la résistance de l'air est donnée par : $R = \frac{Pv^2}{25}$ où P est le poids du parachutiste avec son équipement. ($P = mg$, où m est la masse en kg et $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ est la constante de gravité).

On admet que v est solution de l'équation différentielle : $(E) : v' = g(1 - \frac{v^2}{25})$.

On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, et on pose sur $\mathbb{R}_+ : z = \frac{1}{v-5}$.

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.

En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.