Chapitre 3 Synthèse : Nombres réels

Définition : Soit x et y deux réels. $x \leq y$ si et seulement si $0 \leq y - x$.

Propriété : (de la relation d'ordre)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y, y \leq x) \Rightarrow x = y$
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
4. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x + z \leq x + y$
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$
6. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in \mathbb{R}_-, x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$
7. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

Définition : Soit A une partie de R et soit x un élément de $\mathbb{R}$

1. On dit que x est un majorant (respt un minorant) de A si $\forall a \in A, a \leq x$ (respt $\forall a \in A, x \leq a$). Lorsque A admet un majorant (respt un minorant), on dit qu'elle est majorée (resp minorée).
2. A est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
3. On dit que x_0 est un maximum (respt minimum) de A si x_0 appartient à A et si x_0 est un majorant de A (respt un minorant de A). On note $x_0 = max(A)$ (respt $x_0 = min(A)$).

Remarque : non unicité des majorants et minorants, unicité du minimum et du maximum

Définition : Soit A une partie de R. On appelle borne supérieure (respt inférieure) de A dans $\mathbb{R}$ le plus petit (respt plus grand) des majorants (respt des minorant) de A dans $\mathbb{R}$. Quand il existe, on le note $sup(A)$ (respt $inf(A)$.

Propriété : Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $\lfloor x \rfloor$.

Propriété :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

Définition : On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif, noté $\mid x \mid$ et défini par $\mid x \mid = max(-x; x)$.

Propriété : Soit x et y deux réels.

1. $| x |\geq x$
2. $| xy |=| x || y |$.
3. si $y \neq 0$, $| \frac{x}{y} |= \frac{|x|}{|y|}$.
4. $| x+y |\leq| x | + | y |$

Définition : Pour tout x réel, on définit x^n par $x^0 = 1$ et $x^{n+1} = x \times x^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Pour tout x réel non nul, et tout n entier naturel non nul, on pose $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Propriété : Soit a, b trois réels, m et n deux entiers.

1. $a^{m+n} = a^m a^n$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
6. On suppose $0 \leq n \leq m$: Si $0 \leq a \leq 1$, $a^m \leq a^n$ et si $a > 1$, $a^n \leq a^m$

Définition : Pour a réel positif, on définit la racine carré de a comme l'unique réel positif noté $\sqrt{a}$ qui vérifie $(\sqrt{a})^2 = a$.

Propriété :

1. $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
2. $\sqrt{a^2} =| a |$.

Définition : On appelle polynôme de degré 2 d'indéterminée X toute expression $P(X)$ du type $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$ qu'on appelle les coefficients de P.

Définition : Soit $P(X)$ un polynôme du second degré. On appelle racine réelle du polynôme P tout réel a qui vérifie $P(a) = 0$.

Propriété : Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré.
Alors $P(X) = a((X + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$ (cette écriture s'appelle la forme canonique de P).
La quantité $b^2 - 4ac$ est noté Δ, c'est le discriminant du polynôme.
Si $\Delta \geq 0$, alors P admet deux racines : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine (appelé racine double) : $\frac{-b}{2a}$.
Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme du second degré. On suppose que P possède deux racines, α et β. Alors $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ et $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$.