Chapitre 1 O1 Logique

1.1 Le raisonnement en mathématiques

Le but des mathématiques est de construire des théories cohérentes et correctes du point de vue de la logique. Ces théories peuvent éventuellement permettre de résoudre des problèmes issues d'autres domaines (physique, chimie, biologie, géologie) ou de modéliser des phénomènes issue de la réalité.

La logique repose sur la manipulation de phrases (avec un sujet et un verbe, éventuellement un complément), qu'on appelle assertion ou proposition, suivant des règles simples. Une de ces règles élémentaires stipule qu'une assertions ne peut être que vraie ou fausse, mais jamais les deux simultanément.

Pour déterminer si un assertion est vraie ou fausse, les mathématiques utilisent plusieurs types de raisonnements : le raisonnement déductif (on part d'une proposition que l'on sait vraie et on en déduit, grâce à des règles de logique ou des règles déjà démontrées, une nouvelle proposition vraie), le raisonnement inductif (qui généralise une assertion à partir d'une observation faite dans un cas particulier) et le raisonnement abductif (qui suppose qu'une assertion est vraie parce qu'elle permet d'expliquer les autres assertions).

Tout d'abord, on émet une première proposition qui semble vraie car elle s'intègre bien au reste de la théorie (abduction) puis on teste la véracité de cette assertion et on l'affine sur des cas particuliers (induction) et enfin on démontre sa cohérence avec le reste de la théorie par une suite de déduction logique (induction).

Nous allons détailler à présent le vocabulaire du raisonnement déductif : La proposition qui sert de point de départ et qui est supposée vraie s'appelle l'hypothèse, la proposition dont on a démontré qu'elle est vraie à la fin de la démonstration s'appelle une conclusion. Les assertions intermédiaires qui servent de règles s'appellent des propriétés. Quand une propriété est particulièrement importante, on l'appelle théorème.

1.2 Connecteurs : ou, et, non

Par ailleurs, il existe des connecteurs logiques qui permettent de façon automatique de construire de nouvelles assertions à partir d'une ou deux assertions. Les valeurs de vérité des nouvelles assertions obtenues sont décidées par un tableau de vérité (V = vrai, F = faux).

— Le connecteur "ou" permet de construire une assertion de la façon suivante :

"A ou B" est vraie quand l'une des deux assertions A ou B au moins est vraie.

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque : Il existe deux significations pour le mot "ou" en français. On parle de "ou" exclusif lorsque le "ou" relie deux termes incompatibles ("tu prendras du thé ou du café ?"). On parle de "ou" inclusif lorsque le "ou" relie deux termes qui peuvent éventuellement se réaliser simultanément ("vous avez droit à un tarif réduit si vous êtes chômeur ou si vous avez moins de 25 ans"). En mathématique, le connecteur logique "ou" a toujours un sens INCLUSIF.

— Le connecteur "et" permet de construire une assertion de la façon suivante :

"A et B" est vraie quand les deux assertions A et B sont toutes les deux vraies.

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

— Le connecteur "non" permet de construire une assertion de la façon suivante :

"non A" a une valeur de vérité contraire à celle de A.

A	non A
V	F
F	V

Remarque : on dit que "non A" est l'assertion contraire de A.

Il existe deux autres connecteurs fondamentaux et plus délicats à manipuler. L'implication et l'équivalence.

1.3 Implication

Dans ce paragraphe, on notera A et B deux propositions.

Le symbole $A \Rightarrow B$ se lit "A implique B" ou "Si A alors B".

La table de vérité de l'implication est la suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ce symbole est très subtile. On voit dans le tableau que si A est vraie alors l'implication n'est vraie que lorsque B est vraie. Ainsi, lorsqu'on sait que A est vraie et que A implique B, alors on peut en déduire que B est également vraie.

Par exemple l'assertion "Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$" est vraie.

On sait également que si B est faux et que A implique B est vraie alors A est également faux.

Ainsi, quand $A \Rightarrow B$ est vraie, A est une condition suffisante pour que l'on ait B ou B est une condition nécessaire pour que l'on ait A.

Il existe trois façons de démontrer une assertion écrite sous la forme d'une implication $A \Rightarrow B$:

— La méthode direct : on suppose que A est vraie et on démontre que B est également vraie.

— La méthode par contraposée : on suppose que B est fausse (ou que le contraire de B est vraie) et on démontre que A est fausse (c'est à dire que le contraire de A est vraie). L'assertion contraposée de $A \Rightarrow B$ est l'assertion $nonB \Rightarrow nonA$.

— La méthode par l'absurde (moins utilisée que les précédentes) : on suppose que A est vraie et que B est faux et on démontre qu'on arrive à un résultat absurde. On en déduit que si A est vraie, alors B doit être vraie.

Exercice : Écrire la table de vérité de $nonB \Rightarrow nonA$ et la comparer à la table de vérité de $A \Rightarrow B$.

En revanche, on voit également, que si A est fausse alors B peut être vraie ou fausse, l'assertion sera toujours vraie.

Exemple : " $2 = 3 \Rightarrow 6 > 9$" est une assertion vraie.

Cela traduit le fait que si on suppose quelque chose de faux comme point de départ alors on peut tout à fait en déduire des assertions qui soient vraies ou fausses à l'arrivée ! Par conséquent, lorsqu'on utilise une propriété dépendant de certaines conditions, il faudra vérifier la véracité de ces conditions.

Attention : si l'assertion $A \Longrightarrow B$ est vraie, et si on sait que B est vraie, alors A peut être vraie ou fausse. Autrement dit, on ne peut rien conclure sur A si on sait que B est vraie.

L'assertion $B \Longrightarrow A$, appelée assertion réciproque de $A \Longrightarrow B$, n'est pas toujours vraie, même si l'implication directe est vraie.

Exemple : L'assertion $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ est fausse (car x peut prendre la valeur 2 ou la valeur -2 quand x^2 prend la valeur 4).

Exercices :

1. Donner la réciproque des propositions suivantes, étudier la valeur de vérité de chacune des propositions :
   — "Si la poule a des dents alors le chien aboie".
   — "Si un parallélogramme est un carré alors il a quatre côtés de même longueur".
   — "Si n est un entier alors n est réel".
2. Pour chacune des propositions suivantes, déterminer leur contraposée :
   — "Si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$".
   — "Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est continue $\mathbb{R}$".

1.4 Equivalence

Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit "... est équivalent à... " ou " ... si et seulement si...". L'écriture $A \Leftrightarrow B$ signifie que si A est vraie alors B est vraie et si B est vraie alors A est vraie.

La table de vérité de l'équivalence est la suivante :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Pour démontrer une équivalence, il est donc souvent pratique de montrer deux implications.

Si $A \Leftrightarrow B$, on dit aussi que A est une condition nécessaire et suffisante à B ou encore que pour que B soit vraie, il faut et il suffit que A soit vraie.

Propriété : On a les équivalences logiques :

— "non (A ou B)" si et seulement si "non A et non B".
— "non (A et B)" si et seulement si "non A ou non B".

Démonstration :

— Écrire les tables de vérité de "non (A ou B)" et de "non A et non B" puis les comparer.
— Démontrer de la même manière la deuxième propriété.