Exercices : Ensembles

Exercice 1 : Compléter par les symboles $\in$, $\subset$, $\in$, $\subset$.
$\mathbb{N} \dots \mathbb{C}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \dots \mathbb{C}$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \dots \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$, $\{-1; 1\} \dots \mathbb{Z}$, $[-1; 1] \dots \mathbb{Z}$, $(0; 1) \dots \mathbb{R}^2$, $\{(0; 1)\} \dots \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit E un ensemble non vide et A, B et C trois sous-ensembles de E. Montrer que : $(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)$.

Exercice 3 : Soient A, B et C trois ensembles. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et que $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 4 : Soient A et B deux parties non vide d'un ensemble non vide E.
Montrer que : $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A \Leftrightarrow A \cap B = B \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Exercice 5 : Pour chacune des assertions suivantes : la traduire avec une phrases, écrire sa négation avec des quantificateurs et dire si elles sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \in [-y; y]$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq x$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, \cos(2nx) = 0$.

Exercice 6 :
Compléter les assertions suivantes avec les symboles appropriés.

1. $\dots x \in \mathbb{R}, (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$
2. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
3. $\dots x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$
4. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$
5. $\dots x \in \mathbb{R}, 3x = 0$

Exercice 7 : Les deux assertions suivantes sont-elles vraies ? sont-elles équivalentes ?
1) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq x$
2) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{N}, y \geq x$

Exercice 8 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire par des quantificateurs les assertions suivantes puis donner leur négation :

1. La fonction f prend la valeur 1 en un unique point.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.