

Synthèse Espaces probabilisés finis

Définition : Dans une expérience aléatoire, on ne peut prédire le résultat de façon certaine. Cependant on suppose connu l'ensemble des résultats possibles, appelé univers, noté Ω . Dans la suite Ω est un univers fini. On note en général ω un élément de Ω . Si n est un entier naturel non nul, et si Ω contient n éléments, on note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.

Définition : Soit Ω un univers fini. Un événement est une partie de l'univers ω , c'est à dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé un espace probabilisable.

Ω est l'événement certain, $\emptyset$ est l'événement impossible, une partie contenant un seul élément est appelé un événement élémentaire.

Définition : Si A et B sont deux événements de Ω , on dit que A implique B si $A \subset B$.

Définition : Soit A un événement de Ω , le complémentaire de A , $\overline{A}$, est appelé événement contraire de A . Il est réalisé quand A n'est pas réalisé.

Définition : Si A et B sont deux événements, $A \cup B$ est un nouvel événement. Cet événement est réalisé si A est réalisé ou si B est réalisé.

$A \cap B$ est un nouvel événement. Cet événement est réalisé si A et B sont réalisés simultanément.

Définition : Soit A et B deux événements de Ω . On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$. Exemple : Un événement et son contraire sont incompatibles.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille finie d'événements de Ω . Cette famille est un système complet d'événements si : $\forall (i, j) \in [1; n]^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcap_{i=1}^n A_i = \Omega$. Exemple : Si A est un événements de Ω , le couple $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, la famille $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini. On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ telle que : $P(\Omega) = 1$ et si A et B sont deux événements incompatibles de Ω alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Définition : Un espace probabilisé fini est un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ où $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable et P une probabilité sur cet espace. Si A est un événement de Ω , $P(A)$ est la probabilité de A .

Propriété : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements de Ω . Alors

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Propriété : Pour toute famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles de l'espace probabilisé, on a $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Propriété : Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est un univers fini. Soit $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ n nombres réels tels que $\forall i \in [1; n], p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Alors il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\omega_i) = p_i, \forall i \in [1; n]$.

Dans ce cas, pour tout événement A de Ω , $P(A) = \sum_{i \in [1; n] / \omega_i \in A} p_i$.

Propriété : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable où Ω est un ensemble fini de cardinal n . Il existe une unique probabilité P prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires. Pour tout élément ω de Ω , on a $P(\omega) = \frac{1}{n}$ et pour tout événement A , $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{n}$. Cette probabilité est appelé probabilité uniforme sur Ω .

Propriété : Pour tout événement A de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vérifiant $P(A) \neq 0$, on peut définir une nouvelle probabilité P_A en posant $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, appelé probabilité conditionnelle relative à A . $P_A(B)$ est la probabilité de B sachant A .

Propriété : Pour tous événements A et B d'un espace probabilisé fini, on a :
 $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ si $P(A) \neq 0$ et $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

Propriété : (Formule des probabilités composées)

Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé fini tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Propriété : (Formule des probabilités totales) Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé fini. On suppose que pour tout $i \in [1; n], P(A_i) \neq 0$. Pour tout événement B on a alors : $P(B) = \sum P_{A_i}(B)P(A_i)$.

Propriété : (cas particulier important) Si A et B sont deux événements de l'espace probabilisé et si $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$ alors $P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})$.

Propriété : (formule de Bayes) Si A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors : $P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$.

Définition : Soient A et B deux événement d'un même espace probabilisé. On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Propriété : Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé. On suppose que $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)P(B)$.

Définition : Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements d'un même espace probabilisé. Ces événements sont deux à deux indépendants si pour tout $(i, j) \in [1; n]^2, i \neq j, A_i$ et A_j sont indépendants.