

Chapitre 4 Fonctions d'une ou plusieurs variables

1. Fonctions d'une variable

1.1 Fonction d'une variable à valeurs réels, complexes ou dans $\mathbb{R}^n$

Définition : Une fonction f d'une variable réelle à valeur réelle est un procédé qui associe à toute valeur x d'un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ une unique valeur, notée $f(x)$, dans $\mathbb{R}$.

D_f est appelé ensemble de définition de f .

Pour tout x dans D_f , $f(x)$ est appelée l'image de x par la fonction f .

L'ensemble des valeurs atteintes par f , noté $f(D_f)$ est appelé ensemble image de f .

Si y est un élément de l'ensemble image de f et si x est un élément de D_f qui vérifie $f(x) = y$, alors on dit que x est un antécédent de y par f . On note $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y .

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition : Soit f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle. Soit P un plan munie d'un repère orthonormé. On appelle graphe de f dans le plan P (ou représentation graphique de f), l'ensemble des points du plan P de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque l'on fait varier x dans D_f .

Définition : Soit f et g deux fonctions d'une variables réelles. On dit que $f = g$ si les deux fonctions sont définies sur le même ensemble D et si $f(x) = g(x), \forall x \in D$.

Exemple :

1. $f(x) = 3x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -x + 2, \forall x \in \mathbb{R}_+$
3. définition d'une fonction par la donnée de sa courbe.

Définition : On dit que f est à une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes si f est définie d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Exemple : Soit z un nombre complexe. La fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + z$ est une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes.

Définition : On dit que f est à une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, si f est définie sur un sous ensemble D de $\mathbb{R}$ et à chaque $x \in D$ associe un unique n-uplet

$f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ où $y_1, \dots, y_n$ sont n réels.

Cela revient à se donner n fonctions réelles à valeur réelle $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ définies sur D telle que :

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \forall x \in D$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (\cos(x); \sin(x))$.

1.2 Fonctions usuelles

Définition : La fonction identité est la fonction définie par $f : x \mapsto x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Courbe

Définition : La fonction valeur absolue est la fonction définie par $f : x \mapsto |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \text{ est négatif} \\ x, & \text{si } x \text{ est positif} \end{cases}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

Remarque : Courbe

Définition : Fonction partie entière.

Remarque : Courbe

Définition : Soient a et b deux réels. Une fonction f définie par $f(x) = ax + b$ pour tout x réel est une fonction affine.

Remarque : Courbes

Remarque : Si a est nul, f est une fonction constante. Si b est nul, f est une fonction linéaire.

Définition : Soient n un entier naturel, $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ $n + 1$ réels. Alors la fonction f définie par $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ pour tout x réel est une fonction polynomiale.

Remarque : Courbes fonctions carrées, cubes

Définition : f est une fonction rationnelle si elle est le quotient de deux fonctions polynomiales. Elle est définie pour l'ensemble des réels qui n'annule pas le dénominateur.

Remarque : Courbe fonction inverse

Définition : La fonction exponentielle est la fonction qui à x réel associe $\exp(x) = e^x$.

Propriété :

1. $e^0 = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

Définition : Le logarithme népérien est la fonction qui à x réel strictement positif associe $\ln(x)$.

Remarque : Courbe

Propriété :

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n \ln(x)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

Définition : Le logarithme décimal est la fonction qui à x réel strictement positif associe $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarque : il est utilisé en physique-chimie pour travailler sur des échelles logarithmiques.

Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction "puissance α " est la fonction qui à x réel strictement positif associe $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque : Cette fonction est compatible avec les puissances entières dans le cas des entiers naturels ou relatif.

Propriété :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

Remarque : On peut ainsi définir des fonctions racines de la façon suivante : la fonction racine n -eme est la fonction qui à x strictement positif associe $x^{\frac{1}{n}}$. Avec les propriétés précédentes, on vérifie bien que $(x^n)^{\frac{1}{n}} = x$.

Définition : Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction exponentielle de base a est la fonction qui à tout x réel associe a^x . Pour $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle.