Exercices : Matrices

Exercice 1 : Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi celles ci-dessous.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : En utilisant la méthode du pivote de Gauss, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et calculer éventuellement leur inverse :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble S des matrices carrées M d'ordre 2 telles que $M^2 = 0$ ou 0 désigne la matrice nulle d'ordre 2.

Exercice 4 : Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^3.
2. En remarquant que $C = B + 2I_3$, calculer C^n pour tout n entier naturel.

Exercice 5 :

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit $D = P^{-1}MP$. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = PD^kP^{-1}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A + B = AB$. Montrer que $A - I_n$ est inversible et calculer $(A - I_n)^{-1}$.

Exercice 7: Pour chacun des systèmes suivants, calculer le déterminant de la matrice associée et dire si le système admet une unique solution.

$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 7x - 2y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda x + 3y = 0 \\ 2x - (2-\lambda)y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + (1-\lambda)y = 0 \\ 2x - (2-\lambda)y = 1 \end{cases}$

Exercice 8: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier p non nul tel que $A^p = 0$. En utilisant une factorisation du type $A^k - B^k$, montrer que $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9 :
Soit $\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $aM^2 + bM + cI_n = 0$, avec a, b deux réels et c un réel non nul. Montrer que M est inversible.

En déduire une méthode pour montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et en donner l'inverse.

Exercice 10 : Déterminer les valeurs de λ réelles pour lesquelles les matrices suivantes ne sont pas inversibles.
$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Exercice 11 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ (de deux manière différentes).

Exercice 12 :
Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n on appelle trace de A, et on note $tr(A)$, la somme de ces éléments diagonaux.

1. Montrer que la trace d'une somme de matrices est égale à la somme des traces.
2. Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$
3. Montrer que $tr(PAP^{-1}) = tr(A)$ pour toute matrice carrée A et toute matrice inversible P.

Exercice 13 :

1. Montrer que le déterminant d'un produit de matrices carrée d'ordre 2 est égal au produit des déterminants de ces matrices.
2. Redémontrer dans ce cas la propriété sur le produit de matrices inversibles