Méthodes de calcul

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Écrire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes, pour $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une famille de n réels :

1. somme de tous les éléments de E ;
2. somme des inverses des éléments de E (quand cet inverse existe) ;
3. somme des éléments de E qui sont des entiers ;
4. somme des éléments de E multiplié par leur successeur dans l'énumération de E (quand il existe) ;
5. somme des éléments de E multipliés par leur indice.

Exercice 2 : Soient i, j et n trois entiers non nuls, avec $j \geq i$. Que valent les sommes suivantes ? $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=i}^{j} 1$.

Exercice 3 : Écrire sous forme explicite les sommes suivantes puis les calculer :

$a = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} 2^k$; $b = \displaystyle\sum_{j=0}^{5} \frac{j}{j+1}$; $c = \displaystyle\sum_{j=0}^{4} j(j-1)(j-2)(j-3)$; $d = \displaystyle\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} l^j$

Exercice 4 : Quelques formules à savoir démontrer et à connaître :

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   Ces résultats sont à connaître par coeur.
3. Montrer de deux manières différentes la propriété suivante :

   Somme des premiers termes d'une suite géométrique) Soit q un nombre complexe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{ si } q \neq 1 \\ n+1, \text{ si } q = 1 \end{cases}$$

4. En déduire, en posant $q = \frac{a}{b}$, la formule suivante :

   Pour tout couple (a, b) de complexe et pour tout entier naturel n :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Exercice 5 : Calculer les sommes suivantes :
$a = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (On remarquera que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$) ; $b = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{k+1})$; $c = \sum_{i=0}^{n} a + ri$ (a et r sont deux réels). $d = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 1$; $e = \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j$; $f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i + j$; $g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 1$; $h = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

Exercice 6 : Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n} - 1$ est divisible par 7.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1^2}{1\times 3} + \frac{2^2}{3\times 5} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice 7 :
On pose $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$. Déterminer la valeur de S_n pour tout n entier naturel non nul.

Exercice 8 : On définit une suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

. Vérifier qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 9 :
Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence : $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer que pour tout n entier naturel non nul $F_n < (\frac{7}{4})^n$.

Exercice 10 : Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$; $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 11 :

1. Démontrer la formule (en précisant les ensembles de définition) :
$\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\sin(a-b)}(\tan(a) - \tan(b))$
2. Soit $n \in [|3; +\infty[|$. Calculer la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\cos((k-1)x)\cos(kx)}$.

Exercice 12 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0; \pi[, \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$
2. En déduire les solutions dans $]0; \pi[$ de l'équation :

$$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$