Exercices : Suites

Exercice 1 : Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + ... + u_n)$ est monotone et de même monotonie que (u_n).

Exercice 2 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

En déduire le comportement de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 3 : Montrer que la suite (S_n) est convergente en montrant que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$, $u_n = S_{2n}$, $v_n = S_{2n+1}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n! \geq 2^{n-1}$.
2. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est majorée.
3. Conclure sur la convergence de (u_n).
4. Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + \frac{1}{n.(n)!}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et retrouver le résultat précédent.

Exercice 5 :

Soit (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite. Cette suite semble-t-elle converger ? vers quel réel ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0; 2]$.
3. On pose $g(x) = \sqrt{2+x} - x, \forall x \in [0; 2]$. Étudier le signe de g et en déduire le sens de variation de a_n.
4. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 :

Soit (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3}{1+3a_n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite. Cette suite semble-t-elle converger ? vers quel réel ?
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [0; 3]$.
3. Étudier le sens de variation des suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}).
4. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 7 :

Soit (a_n) définie par $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - {a_n}^2 \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Déterminer graphiquement les premiers termes de la suite. Cette suite semble-t-elle converger ? vers quel réel ?
2. Montrer que cette suite est strictement décroissante, à valeur dans $]0;1[$. Déterminer sa limite.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$

Exercice 8 : Pour chacune des suites (u_n) suivantes déterminer un équivalent simple et éventuellement la limite.

1) $u_n = n^2 + 2n$; 2) $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$; 3) $u_n = e^n + n^e$; 4) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 5) $u_n = \sin(\frac{n+1}{n^2})$; 6) $u_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{e^{\frac{1}{n}}-1}$; 7) $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$; 8) $u_n = \frac{\tan(\frac{1}{n})-\frac{1}{n^2}}{\ln(1+\frac{1}{n})}$.