Exercices : Suites

Exercice 1 :

Déterminer le terme général des suites suivantes : a) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 6; \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = -3a_n; \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = 4a_n + 3; \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n; \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + n^2, \forall n \in \mathbb{N}; \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2^n, \forall n \in \mathbb{N}; \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2^n a_n, \forall n \in \mathbb{N}; \end{array}\right.$ h) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \forall n \in \mathbb{N}; \end{array}\right.$ i) $\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1; b_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2b_n; b_{n+1} = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}; \end{array}\right.$

Exercice 2 : Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

1. Vérifier que la formule $f(x) = \frac{-x+18}{3x+2}$ définit une fonction de l'intervalle $[0;\ 9]$ dans lui-même.
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie
3. (a) Montrer que la suite (v_n) donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$ est bien définie.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   (c) Donner une expression de u_n en fonction de n.
   (d) Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 4 :

On définit deux suites (a_n) et $(b_n$ par $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les suites (v_n) et (u_n) définies par : $v_n = a_n - b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. En déduire le terme général respectif de (a_n) et de (b_n).

Exercice 5 : Pour chacune des situations suivantes, modéliser le problème à l'aide d'une suite et le résoudre.

1. On suppose qu'une population constituée initialement de 25 individus augmentent de 10 individus par an. Combien y aura-t-il d'individus au bout de 12 ans ?
2. On suppose qu'une population est constituée initialement de 100 individus. Le nombre d'individus est multiplié par 1,2 chaque année. Combien y aura-t-il d'individus au bout de 7 ans ?
3. On suppose qu'une population est constituée de 62208 individus au bout de 5 ans. Sachant qu'elle a augmenté en moyenne de 20% par an, de combien d'individus était-elle constituée initialement ?
4. Une population est passée de 600 à 1400 individus en 3 ans. Si sa croissance est arithmétique, quelle est sa raison ? Si la croissance est géométrique, quelle est sa raison ? Au bout de 8 ans, la population est de 2255. Quelle hypothèse est la plus probable ?