Synthèse Polynômes

Définition : Soit n un entier, $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $n+1$ éléments de l'ensemble $\mathbb{K}$. La fonction P qui à$x \in \mathbb{K}$ associe $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Définition : Le polynôme qui a tout $x \in \mathbb{K}$ associe 0 est appelé polynôme nul.

Propriété : Soit P un polynôme à coefficient réel. Alors P est nul si tous les coefficients de P sont nuls.

Propriété : Deux polynômes sont égaux si ils ont mêmes coefficients.

Propriété : Soit P un polynôme non nul. Alors il existe un unique n entier naturel et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. n est alors appelé le degré de P. On le note $\deg(P)$.

Le monôme $a_n X^n$ est appelé monôme dominant et le coefficient a_n est appelé coefficient dominant.

Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

Définition :L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n non nul, à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle polynôme dérivé de P, le polynôme $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Le polynôme dérivée d'un polynôme constant est le polynôme nul.

Définition : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n non nul, à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle p^{eme} dérivé de P le polynôme $P^{(p)}$ défini pour tout entier naturel p par la récurrence $P^{(0)} = P$ et $\forall p \in \mathbb{N}, P^{(p+1)} = (P^{(p)})'$.

Définition : Soit P et Q deux polynomes. La somme de ces deux polynômes est un nouveau polynomes défini par $P + Q(x) = P(x) + Q(x)$.

Définition : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On note λP le polynôme qui à a associe $\lambda P(x)$.

Définition : Soient P et Q deux polynômes. On note PQ le polynôme qui à a associe $P(x)Q(x)$.

Propriété : Soient P et Q deux polynômes tels que $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Définition : Soient P et Q deux polynômes. On note $P \circ Q$ le polynôme qui a à x associe $P(Q(x))$.

Propriété : : $deg(P') = dep(P) - 1$ si P est non constant.
deg($P + Q$)$\leq$max(deg(P),deg(Q)).
deg(λP)=deg(P) si λ est non nul.
deg(PQ)=deg(P)+deg(Q)
deg($P \circ Q$)=deg(P)deg(Q).

Définition : Soit P et Q deux polynômes. P se factorise par Q s'il existe un polynôme R tel que $P(X) = Q(X)R(X)$.

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que P se factorise par $X - a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Remarque :Si $P(X) = Q(X)R(X)$ alors deg(R)=deg(P)-deg(Q).

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Propriété : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. Alors P se factorise par $X - a$ si et seulement si a est une racine de P.

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que a est une racine multiple d'ordre de multiplicité r s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)^r Q(x)$ et $Q(a) \neq 0$. r s'appelle l'ordre de multiplicité de a.

Propriété : Soit P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit a un élément de $\mathbb{K}$. a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P(a) = P'(a) = P''(a) = ... = P(r-1)(a) = 0$ et $P(r)(a) \neq 0$.

Propriété :(Théorème de d'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Propriété : Tout polynôme de degré n à coefficients complexes peut s'écrire comme le produit de n polynôme de degré 1.

Propriété : Soit P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il admet n racines complexes, chacune comptée avec son ordre de multiplicité. De plus,les racines non réelles sont conjuguées deux à deux et de même ordre.

Propriété : Tout polynôme à coefficient réels peut être écrit sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients réels, soit de degré 1, soit de degré 2, sans racine réelle.