Chapitre 9 Systèmes linéaires synthèse

Définition : On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système de la forme : $S : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_n = b_n \end{cases}$

où les coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in[|1;n|]\times[|1;p|]}$ et les seconds membres $(b_i)_{i\in[|1;n|]}$ sont des réels ou des complexes fixées et les nombres $(x_i)_{i\in[|1;p|]}$ sont les inconnues.

Une solution du système est un p-uplet de valeurs $(x_1, x_2, ...x_p)$ pour lequel les n équations sont vérifiées. L'existence et le nombre de solutions dépendent des coefficients.

Le systèmes est homogènes si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Définition : On appelle système linéaire réduit tout système du type

$$T : \begin{cases} x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ ... \\ x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,p}x_p = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ ... \\ 0 = b_n \end{cases}$$

Dans le cas d'un système réduit, l'ensemble des solutions peut être vide, contenir une unique solution ou contenir une infinité de solutions.

Définition : Un système S est transformé en un système S' équivalent si :

- On échange la colonne d'indice j_1 avec la colonne d'indice j_2. On note $C_{j1} \leftrightarrow C_{j2}$.
- On échange la ligne d'indice i_1 avec la colonne d'indice i_2. On note $L_{i1} \leftrightarrow L_{i2}$.
- On multiplie la ligne d'indice i par un nombre α non nul. On note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- On ajoute à la ligne i_2 la ligne d'indice i_1 multiplié par un nombre α.
  On note $L_{i2} \leftarrow L_{i2} - \alpha L_{i1}$.

Propriété : Soient n et p deux entiers naturels non nuls et S un système de n équations à p inconnues. Le système S est équivalent à un système réduit.

Remarque : La méthode utilisée dans l'hérédité porte le nom de méthode du pivot de Gauss. C'est elle qui est utilisée en pratique.