DS 5 (durée 3h00)

Le sujet comporte trois pages et trois problèmes indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème 1 : La mouche

Une mouche se déplace dans une maison contenant trois pièces A, B, C communiquant entre elles. A l'instant $t = 0$, la mouche se trouve dans la pièce A. Si elle est dans une pièce à l'instant $t = n$, alors elle reste dans cette pièce avec une probabilité de $\frac{2}{8}$ et se rend dans les autres pièces avec la même probabilité de $\frac{3}{8}$. On note A_i(respectivement B_i, respectivement C_i) l'événement la mouche se trouve dans la pièce A (respectivement B, respectivement C) à l'instant $t = i$.

1. (a) A l'aide d'un arbre de probabilité, représenter les deux premières étapes de son déplacement (correspondant aux temps $t = 0, t = 1, t = 2$).
   (b) Calculer la probabilité du déplacement $A_0 \cap B_1 \cap B_2 \cap C_3 \cap A_4$.
   (c) Calculer les probabilités des événements B_1, B_2, B_3.
   (d) Sachant que la mouche est dans la pièce B à l'instant $t = 2$ qu'elle est la probabilité qu'elle ait été dans la pièce C à l'instant $t = 1$.
   (e) On note R l'événement "la mouche est restée dans la même pièce entre les instant $t = 1$ et $t = 2$". Calculer $P(R)$. Les événements R et B_2 sont-ils indépendants ? Justifier par le calcul.
2. (a) Soit n un entier naturel. On désire modéliser une succession de n déplacements de la mouche de la manière suivante : dans une urne, on place six boules rouges numérotées de 1 à 6 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On tire successivement et avec remise n boules de l'urne. Si on obtient une boule rouge numérotée 1, 2 ou 3, la mouche se déplace dans la pièce suivante (B si elle est en A, C si elle est en B, A si elle est en C). Si on obtient une boule rouge numérotée 4, 5 ou 6, la mouche se déplace dans la pièce précédente (C si elle est en A, B si elle est en C, A si elle est en B). Si on obtient une boule blanche, elle reste où elle est.

   Justifier que ce modèle correspond à l'expérience aléatoire de la mouche.
   (b) Décrire l'univers du modèle de l'urne et calculer son cardinal.
   (c) Soit C_k l'événement "obtenir k boules rouges au cours des n tirages" (avec $0 \leq k \leq n$). Déterminer la probabilité de C_k.
   (d) Montrer que la famille d'événements $(C_k)_{k \in [|0;n|]}$ forment un système complet d'événements ? Vérifier par le calcul que $\sum_{k=0}^{n} P(C_k) = 1$.
   (e) Déduire des questions précédentes la probabilité que la mouche change k fois de pièce au cours de n déplacements (avec $0 \leq l \leq n$). Justifier soigneusement.

Problème 2 : Suite définie par récurrence

1. (a) Soit f la fonction définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$$

   et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$
   Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.

   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$.
   (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)

   Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n$est défini et $u_n > 0$
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$.
   On définit les suites v et w par : pour tout entier n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.
   (a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.
   (b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.
   (c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u.
4. On pose pour tout entier n,

$$z_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$

   (les valeurs a et b étant celles définies précédemment avec $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)
   On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, $z_n$est bien définie et que z est une suite géométrique.
   (b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n. Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Problème 3 : Initiation aux séries numériques

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite dont le terme général est donné par $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
La nature d'une suite désigne le fait que la suite est convergente ou divergente.
Dans ce problème, on étudie la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, en fonction de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

1. Étude de quelques exemples.
   (a) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ avec q un réel fixé.
      i. Déterminer la nature de (S_n) dans le cas où $q = 1$.

ii. On suppose que $q \neq 1$. Exprimer le terme général de $(S_n)_{n\geq 1}$ de façon simple et en déduire la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ en fonction de la valeur de q.

(b) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

i. Établir que $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

ii. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1)$.

iii. En déduire la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

iv. Montrer que $S_n \sim \ln(n)$ en $+\infty$.

(c) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

ii. En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite majorée.

iii. Déterminer la nature de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

iv. Écrire une fonction *serie* en PYTHON qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de S_n.

v. Écrire une fonction *valeur* en PYTHON qui prend en argument un réel positif e et qui renvoie la première valeur de S_n qui vérifie $\mid S_n - S_{n-1} \mid < e$. Justifier que cette algorithme se termine bien. A quoi sert-il ?

2. Propriétés générales.

Dans cette question, on revient au cas général : $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite réelle quelconque.

(a) Écrire le terme général u_n en fonction de S_n et S_{n-1}.

(b) En déduire que si $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite qui tend vers 0.

(c) A l'aide des exemples de la première partie, montrer que la réciproque de la proposition précédente est fausse.

(d) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs.

i. Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.

ii. En déduire une condition nécessaire sur $(S_n)_{n\geq 1}$ pour que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge, dans le cas où $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs.