Exercices : Continuité

Exercice 1 : Donner l'ensemble de définition et étudier la continuité des fonctions suivantes. Dire si les fonctions sont prolongeables par continuité.

$f_1 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}$; $f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$; $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$;

$f_3 : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{2x}}$ si $x \neq 0$ et $f_3(0) = \sqrt{e}$;

$$f_4 : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+3x)}, x > 0 \\ \frac{3}{2}, x = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1-3x}-1}, x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_n) : x^n + x^{n-1} + ... + x = 1$

1. Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que pour $n > 2$, $x_n \in [\frac{1}{2}; 1[$
3. Déterminer le sens de variation de (x_n).
4. Montrer que (x_n) converge. On note l sa limite.
5. Montrer que $l < 1$.
6. En réécrivant l'équation E_n à l'aide d'une somme géométrique, déterminer la limite l.

Exercice 4 : Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(\frac{x}{2})$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 6 Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in [0; T], f(x) = f(y)$
2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :
Existe-t-il deux réels strictement positifs distincts a et b tel que $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \frac{a}{b}$?