

## Exercices : Limites de fonctions

**Exercice 1 :** Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 + 2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3+x} - \sqrt{x} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln(x)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos(x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \end{aligned}$$

**Exercice 2 :**

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$
2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ .  $f$  a-t-elle une limite en  $+\infty$  ?
3. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ .  $g$  a-t-elle une limite en  $+\infty$  ?

**Exercice 3 :**

Déterminer l'équation des asymptotes en  $+\infty$  pour les fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 7x - 3}{x-4}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ .
2.  $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 + x + 1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $h : x \mapsto \frac{(x+1) \ln(x+1)}{\ln(x)}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 4 :**

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes aux points considérés :

$$\begin{aligned} & a) \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \text{ en } +\infty; \quad b) \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ en } 0; \\ & c) \ln(1 + \sin(x)) \text{ en } 0^+; \quad d) x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x) \text{ en } +\infty; \\ & e) \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \text{ en } +\infty; \quad f) (x + \sin(x))(e^x + \ln(x) - 2) \text{ en } +\infty; \\ & g) \tan(x) \text{ en } \frac{\pi}{2}; \quad h) \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ en } 1^- \end{aligned}$$

**Exercice 5 :** Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln(x)} ; b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x) - x}{x + \cos(x)} ; c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{(x^2 - 1)} ;$$
$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \tan(x)}{x \sin^2(x)}$$