Chapitre 19 : Continuité

f est une fonction réelle à valeurs réelles définie sur D_f.

Définition : Soit $a \in D_f$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition : Soit $D_f = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$.

Définition : Soit $a \in D_f$. On dit que la fonction f est continue à gauche (respectivement à droite) en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$).

Propriété : Soit a un réel qui n'appartient pas à D_f. On suppose que f possède une limite finie l en a. Soit g la fonction définie sur $D_f \cup a$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $g(a) = l$. Alors g est un prolongement de f, continue en a. On l'appelle prolongement par continuité de f en a.

Définition : Soit a un réel qui n'appartient pas à D_f. On dit que f est prolongeable par continuité à droite en a si f admet une limite finie à droite en a. On dit que f est prolongeable par continuité à gauche en a si f admet une limite finie à gauche en a.

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D, a un élément de D et λ un réel quelconque. Si f et g sont continues en a alors $f + g$, fg et λf sont continues en a. De plus si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

Propriété : Soient f et g deux fonctions telles que $D_g \subset D_f$ et a un élément de D_f. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Propriété : Soit $a \in D_f$. On suppose que f est définie au voisinage de a. Si f est continue en a, alors pour toute suite (u_n) de D_f convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Propriété : Soient a et b deux réels avec $a < b$. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(x) = k$.

Propriété : Si f est continue sur un intervalle I non réduit à un point et si f change de signe sur I alors f s'annule sur I.

Propriété :L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Définition : Un segment est un intervalle fermé borné.

Propriété : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornées (c'est à dire possède un maximum et un minimum).

Propriété :L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Propriété : Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

La bijection réciproque de f est elle aussi monotone, de même sens de variation et est continue sur $f(I)$.

Définition : La restriction f de la fonction tan à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. Comme $\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$, f est une bijection continue de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée Arctangente et notée Arctan. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et impaire.