Synthèse limites d'une fonction

f et g sont deux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles et on note D_f et D_g leur ensemble de définition.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de a s'il existe un intervalle I contenant a, non réduit à un point, tel que $I \setminus \{a\} \subset D_f$.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Soit l un réel.
On dit que f a pour limite l en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \varepsilon$
on note alors $l = \lim\limits_{a} f$ ou $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Soit l un réel.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \mid f(x) - l \mid = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - l) = 0$

Définition : On dit que f admet une limite finie en a si il existe un réel l tel que f a pour limite l en a.

Définition : Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si $\forall K > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq K$
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{a} f = +\infty$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. l est soit un nombre soit $+\infty$ soit $-\infty$. La fonction f admet l pour limite à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ (resp $D_f \cap]-\infty; a[$) a pour limite l en a. On note $\lim\limits_{a^+} f = l$ (resp $\lim\limits_{a^-} f = l$).

Propriété : Soit a un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a.
On suppose qu'il existe un voisinage ouvert de a inclus dans D_f.

1. Si a n'appartient pas à D_f et si l désigne soit un nombre réel soit $+\infty$ soit $-\infty$ on a : $\lim\limits_{a} f = l \Leftrightarrow \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = l$
2. Si a appartient à D_f, on a : $\lim\limits_{a} f = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = f(a)$

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$ s'il existe un réel α tel que $[\alpha; +\infty[\subset D_f$ (resp. $[+\infty; \alpha[\subset D_f$).

Définition : Soit l un réel. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} x \geq A \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \varepsilon$
On note $\lim\limits_{+\infty} f = l$

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $\forall K > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq K$
On note $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Remarque : : Toutes les définitions de limites ne sont pas écrites dans cette synthèse. Les autres peuvent se déduire aisément de celles données.

Propriété : Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si f admet une limite finie en a, cette limite est unique.

Propriété : Soient a un réel fini ou $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction définie au voisinage de a et possédant une limite finie en a. Alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction possédant une limite finie l non nulle au voisinage de a. Alors f garde le signe de l et ne s'annule pas au voisinage de a.

Propriété : Soient f une fonction définie sur D, (u_n) une suite d'éléments de D, a une réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Propriété : Soient a et l deux éléments qui peuvent être des réels finis, $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et au voisinage de a. La fonction f a pour limite l en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de D de limite a, la suite $f(u_n)$ a pour limite l.

Définition : Soit a un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f en a.

Définition : Soit b un nombre réel. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$).

Définition : Soient a et b deux nombres réels, tels que $a \neq 0$. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).

Propriété : a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a. Soit λ, l, l' trois réels.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} (f + g)(x) = 0$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f.g(x) = 0$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$.
   (a) $\lim\limits_{x\to a} f + g(x) = l + l'$
   (b) $\lim\limits_{x\to a} f.g(x) = ll'$
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l$
   (d) Si $l' \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g}(x) = \dfrac{1}{l'}$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{l}{l'}$.

Propriété : Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f + g(x) = +\infty$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x\to a} f.g(x) = +\infty$.
3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ et si g admet une limite finie non nulle ou tend vers l'infini alors fg a pour limite $\pm\infty$ le signe étant déterminé par les règles des signes.
4. Si f tend vers $\pm\infty$ en a alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et a pour limite 0 en a.
5. Si f tend vers 0 en a et si f est strictement positive (resp.strictement négative) au voisinage de a alors $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$).

Formes indéterminées :
— la somme de deux fonction l'une tendant vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$.
— Le produit de deux fonctions, l'une tendant vers 0 et l'autre vers l'infini.
— le quotient de deux fonctions tendant vers 0, le quotient de deux fonctions tendant vers l'infini.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f une fonction définie au voisinage de a et qui admet l pour limite en a. Soit g une fonction définie au voisinage de l et qui a pour limite l' en l. Alors $g \circ f$ a pour limite l' en a.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. on suppose que $f \leq g$ au voisinage de a.

1. Si f et g ont des limites finies en a alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.
3. Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et h ont la même limite finie, l, au voisinage de a et que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a. Alors g admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} g(x) = a$.

Propriété : Soit f une fonction définie et croissante sur l'intervalle $I =]a; b[$ (avec $a < b$ deux réels). Alors f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Si f est majorée, la limite en b est finie et égale à la borne supérieur de f. Si f est minorée, la limite en a est finie et égale à la bornée inférieure de f.

Propriété : Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. $\lim_{x\to 0^+} x^a(\ln(x))^b = 0$
2. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$
3. $\lim_{x\to +\infty} x^a e^{-bx} = 0$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \infty$. f et g sont définies au voisinage de a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction φ définie sur $D \cap V$ telle que

$$\forall x \in V \cap D f(x) = g(x)\varphi(x) et \lim_{x \to a} \varphi(x) = 1$$

Dans ce cas, on note $f(x) \sim_{x \to a} (g(x))$ ou $f \sim_a (g)$.

Propriété : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Si f est équivalente à g au voisinage de a alors g est équivalente à f au voisinage de a et on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a.

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$. f et g sont définies au voisinage de a. Si $a \in D$ on suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

On suppose qu'il existe un voisinage I de a tel que g ne s'annule pas sur $D \cap I \setminus \{a\}$. Alors :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Propriété : Soient f une fonction définie sur un ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et $a \in D_f$. Si la fonction f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors au voisinage de a, on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.

Propriété : Au voisinage de 0 on a : $\sin(x) \sim x$; $\tan(x) \sim x$; $\ln(1 + x) \sim x$ et pour $a \neq 0, (1 + x)^a - 1 \sim ax$, $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

Au voisinage de 1, on a $\ln(x) \sim x - 1$

Propriété : (FI classique) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Propriété : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

1. Si l'une possède une limite finie ou infinie en a alors l'autre possède la même limite en a.
2. Si f ne s'annule pas au voisinage de a alors g ne s'annule pas au voisinage de a.
3. Si f est strictement positive (resp. strictement négative) au voisinage de a alors g est strictement positive (resp. strictement négative) au voisinage de a.

Propriété : On considère des fonctions définies au voisinage de a, a étant un réel ou $\pm\infty$. Les équivalences sont données au voisinage de a.

1. Si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$.
2. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
3. Si $f \sim g$ et si $n \in \mathbb{N}$ alors $f^n \sim g^n$.
4. Si $f \sim g$ et s'il existe un voisinage I de a tel que g ne s'annule pas sur $D \cap I \setminus \{a\}$ alors $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$