Exercices : Dérivabilité

Exercice 1 :

1. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
2. En déduire un équivalent de la fonction arctan en 0.

Exercice 2 :

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3 :

1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ (en utilisant la formule des accroissements finis).
2. Calculer la partie entière de $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Exercice 4 :

Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que I est stable par f et que $\forall x \in I, \mid f'(x) \mid < 1$.

On considère une suite $(u_n)_{n\in N}$ telle que $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Si f n'a pas de point fixe dans I, que peut-on dire de la convergence de u ?
2. On suppose que f a un unique point fixe l dans I.
   (a) Montrer que $\exists k \in [0; 1[, \mid u_{n+1} - l \mid \leq k \mid u_n - l \mid$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \mid u_n - l \mid \leq k^n \mid u_0 - l \mid$
   (c) Conclure.
3. Application : Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n (1 - un)$$

Exercice 5 : Donner la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \ln(1+x)$; $x \mapsto \sin(x)$.

Exercice 6 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $]a, b[$.

Exercice 7 :

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f(0) = 0$ et f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier que pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$.
2. En déduire que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 :

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$.