Exercices : Intégration

Exercice 1
Déterminer les primitives suivantes :

1. $x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$
2. $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \arctan(t)dt$ (intégration par parties)
3. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(2t)e^t dt$ (deux intégrations par parties)
4. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2(t)\cos^3(t)dt$ (linéraisation)
5. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\cos(t)}$ (changement de variable $u = \sin(t)$).

Exercice 2
Calculer les intégrale suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sin^4(t)dt$ (linéarisation)
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ (changement de variable $u = e^x$)
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$ (changement de variable $u = \tan(t)$)
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$ (écrire la fraction sous forme de somme de deux fractions)
5. $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)dx$ (intégration par parties)
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$ (faire apparaître u'/u)
7. $\displaystyle\int_0^1 \lfloor 4x + \frac{1}{2} \rfloor dx$

Exercice 3
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Montrer que (I_n) converge et donner sa limite.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
5. Montrer que I_n est équivalent à $\frac{1}{(n+1)e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (Intégrales de Wallis)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$

1. Calculer I_0, I_1, I_2.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Converge-t-elle ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
4. En déduire l'expression de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.
5. Calculer nI_nI_{n-1} pour tout entier naturel n non nul.
6. Trouver un encadrement de $n{I_n}^2$ puis un équivalent de la suite (I_n).

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$

Exercice 6

Soit G la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que G est définie, continue et dérivable sur R_+^*.
2. Calculer G' puis déterminer le sens de variation de G.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln 2)e^x \leq G(x) \leq (\ln 2)e^{2x}$.
4. Montrer que G est prolongeable par continuité en 0.
5. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que G est $\mathcal{C}^1$ en 0.