

Synthèse Intégration

Propriété :(admis) Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I .

Définition : Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ avec a et b deux réels. Soit F une primitive de f sur cet intervalle. On appelle intégrale de f de a à b le réel $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur I . Soit a et b deux réels appartenant à I . On a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout $a \in I$ la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Propriété :(linéarité de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ et λ et μ deux réels. $\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$

Propriété :(relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I . $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

Propriété :(positivité de l'intégrale) Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ (avec $a < b$). $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Propriété :(croissance de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ (avec $a < b$) telles que $f(t) \leq g(t) \forall t \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ (avec $a < b$). $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Propriété :(inégalité de la moyenne) Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ (avec $a < b$). $\min(f; [a; b]) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq \max(f; [a; b])$

Propriété :(Intégration par parties) Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a; b]$. $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Propriété :(Changement de variables) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit f une continue sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors, pour tout a, b dans J , $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Propriété : Si f est une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^x f(t)dt = 2 \int_0^x f(t)dt$

Si f est une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-x}^x f(t)dt = 0$

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Propriété :(admis) Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout a et b dans I tels que $a < b$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ désigne l'aire algébrique du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ (avec $a < b$).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + k \frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$$

Définition : Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a; b]$ si f est continue en tout point de $[a; b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f admet une limite finie à gauche et à droite et si f admet une limite finie à droite en a et à gauche en b .

Autrement dit f est continue sur $[a; b]$ s'il existe des réels $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ tels que :

- $x_0 = a$ et $x_n = b$.
- Pour tout $k \in [0; n-1]$, f est continue sur $]x_k; x_{k+1}[$ et admet un prolongement par continuité sur $]x_k; x_{k+1}[$.

la famille $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est appelée subdivision adaptée à f .

On note $\mathcal{C}_{\uparrow}([a; b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

Définition : Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$. On dit que f est une fonction en escalier si il existe des réels $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ tels que :

- $x_0 = a$ et $x_n = b$.
- Pour tout $k \in [0; n-1]$, f est constante sur $]x_k; x_{k+1}[$.

Définition : Soient $a < b$ deux réels. Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $k \in [0; n-1]$, on note f_k la fonction continue sur $[x_k; x_{k+1}]$ qui prolonge la restriction de f à $]x_k; x_{k+1}[$. alors l'intégrale de f de a à

$$b \text{ est le réel : } \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt$$

Propriété : Soit f une fonction en escalier sur $[a; b]$, $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f , $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour $k \in [0; n-1]$ et $x \in]x_k; x_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k)$$