DM 7 : Espaces de polynômes (HP)

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

1. A l'aide des 10 caractéristiques des espaces vectoriels, montrer que E muni de l'addition de deux polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ est une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (1; 1 - X; X - X^2; X^2 - X^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire que $\mathcal{C}$ est une base de E.
4. On note Q le polynôme défini par $Q(X) = 2X + 3X^2 + X^3$. Donner les coordonnées de P dans chacune des deux bases vues ci-dessus.
5. On considère à présent l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) + P(1) = 0\}$. Montrer que F est sous espace vectoriel de E.
6. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. A quelle condition nécessaire et suffisante sur d le polynôme P appartient-il à F ?
7. En déduire que $F = vect((1 - 2X^3); (X - X^3); (X^2 - X^3))$.
8. Trouver une base de F et en déduire la dimension de F.
9. On considère l'application $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $g(P) = XP' - 3P$
   (a) Calculer $f(X^2 + X - 1)$ et $f(X^3 - 2X)$.
   (b) Montrer que g est linéaire et déterminer la matrice associée à g dans la base canonique.
   (c) Déterminer $Ker(g)$. Que peut-on en déduire sur g ?
   (d) Déterminer les valeur de λ pour lesquels $Ker(g - \lambda Id)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
   (e) Pour ces valeurs de λ déterminer une base de $Ker(g - \lambda Id)$.