

DS 6 (durée 3h00)

Le sujet comporte trois pages et trois problèmes indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème 1 : Etude d'une fonction

Dans tout ce problème on s'intéresse à la fonction f qui vérifie : $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .
(b) f est-elle dérivable en 0 ?
(c) Justifier que f est de classe C^1 sur $[0; 1[$.
(d) Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.
(e) tracer la courbe de f .
2. Dans cette partie, on étudie la suite (v_n) qui vérifie $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq v_n$.
(c) Justifier que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite.
(d) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
(e) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$.
(f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.
(g) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.
(h) i. Écrire un programme en PYTHON qui calcule une valeur de v_n qui soit une valeur approchée de e à 10^{-12} près.
ii. Donner le nom et le programme d'un autre algorithme classique permettant de déterminer la valeur de x tel que $f(x) - x = 0$.
3. On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.
On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K .
(a) On pose $y = \frac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, $(E_2) : y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$.
(b) Montrer que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = \frac{1}{f(x)}$ est une solution particulière de E_2 .
(c) Résoudre (E_2) sur K . En déduire les solutions de (E_1) .
4. On pose $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.
(a) Déterminer l'ensemble de définition J de H .
(b) Étudier la limite de H en 0.

Problème 2 : Attention aux variables !

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) En utilisant la définition d'une fonction croissante, montrer que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$
(b) Calculer $f_k(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
(c) Étudier la limite de la suite de nombres réels $(f_k(0))_{k \geq 0}$.
(d) En déduire, pour tout nombre réel positif x fixé la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$.
2. (a) Soit x un nombre réel strictement positif.
Établir à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $k \geq 0$:

$$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$$

- (b) Montrer que $f_0(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
(c) En déduire l'expression de f_1 .
(d) Déterminer la limite en 0 de f_0 .
(e) Déterminer un équivalent de $f_0(x)$ en $+\infty$.
(f) A l'aide de la question a), montrer que pour tout k , $f_k(x) \sim \frac{k!}{x^{k+1}}$ en $+\infty$
3. (a) En effectuant le changement de variable $u = tx$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x strictement positif : $f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$
(b) En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
(c) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1} .
(d) Montrer que pour tout réel y positif ou nul : $1 - e^{-y} \leq y$
(e) En déduire que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est continue en 0.

Exercice : Fonction définie par une intégrale

Pour $x \in]0; 1[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ et $g(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]0; 1[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, $\frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \leq g(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln(x)}$
3. En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.
4. Calculer $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.
5. En déduire que $\forall x \in]0; 1[$, $x \ln(2) \leq g(x) \leq x^2 \ln(2)$.
6. Montrer que g est prolongeable par continuité en 1.
7. Montrer que g est dérivable sur $]0; 1[$ et calculer la dérivée de g .
8. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$, $\forall x \in]0; 1[$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
9. Justifier l'existence et calculer la valeur de $\int_0^1 \varphi(t) dt$.