Exercices : Lois usuelles

Exercice 1

Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en aligne 5 au hasard afin de former un mot de 5 lettres. X : nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X : nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X : nombre de bosses.
4. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. X : nombre de boules vertes tirées.
5. On suppose que 1 % des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. $X =$ nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2 :

1. Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $\{1, ..., 20\}$.
   (a) Quelle est la loi de $sup(X, 2) - 1$? Quelle est la loi de $20 - Y$?
2. Si X et Y sont indépendantes et suivent des lois binômiales de paramètres 3 et $\frac{1}{4}$
   (a) Quelle est la loi de $inf(X, 1)$? Quelle est la loi de $3 - Y$?

Exercice 3 :

On considère une urne contenant 8 billes vertes et 8 billes bleues, dont on extrait un paquet de 8 billes. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de billes vertes dans le groupe. Calculer $P(3 \leq N \leq 5)$ et comparer avec la probabilité de l'évènement similaire pour une loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{1}{2}$.

Exercice 4 :

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Déterminer un nombre minimum de lancer pour avoir une probabilité supérieure à 0.5 d'obtenir une fréquence d'apparition de l'as qui s'écarte de moins de 0.01 de la valeur $\frac{1}{6}$.

Exercice 5 :

soit X une VAR de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- Si X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$, le compteur affiche la bonne valeur de X.
- Pour $X = 0$ ou $X = n$, le compteur affiche un nombre au hasard compris entre 1 et $n - 1$.

1. Soit Y la var égale au résultat affiché par le compteur. Donner la loi de Y.
2. Calculer la probabilité que le compteur affiche une valeur correcte.

Exercice 6

Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées par des entiers de gauche à droite, Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce se trouve sur la case 0. On note X_n et Y_n les VAR représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.

Déterminer la loi de Y_n, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n puis exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 7

En France, on considère qu'une certaine maladie M est présente dans une proportion de 1%. On effectue un test permettant de détecter cette maladie sur un échantillon de 100 personnes. Soit X le nombre de personnes parmi l'échantillon affectées de la maladie.

1. Reconnaître la loi de X.
2. En utilisant une approximation justifiée, déterminer la probabilité que X soit égale à 20.

Exercice 8 (formule de Vandermonde) :

On considère une VAR X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

1. En utilisant une propriété des VAR, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = \binom{n_1+n_2}{n}$
2. En utilisant la propriété précédente, démontrer la formule de l'espérance de X.
3. En calculant dans un premier temps $E(X(X-1))$, calculer la variance de X.

Exercice 9 :

Un entraineur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs. Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque 5 buts avec une probabilité de 0,2 ; 4 buts avec une probabilité de 0,5 ; 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entrainement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entrainement.

1. (a) Calculez la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au buts lors d'un entrainement.

   (b) Précisez les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité.

   (c) L'entraineur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X > 8$. Montrez que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entrainement est égale à 0,61 .
2. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succés d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours des ces 10 entrainements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts. Si au cours d'une séance d'entrainement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.

   Déterminer la loi de Y, sa variance et son espérance.
3. Calculez le nombre minimale d'entrainement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.