Exercices : VAR

Exercice 1

La loi d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.1	0.35	0.15	0.25	0.15

1. Donner sa fonction de répartition et en tracer le graphe.
2. Calculer $P(X < 0)$, $P(X > -1)$, $P(-3,5 < X \leq -2)$, $P(-3,5 < X < 2)$.
3. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, X^2)$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la loi de X .

1. On tire une boule au hasard dans une urne contenant n boules numérotées. On note X le numéro de la boule obtenue.
2. Dans une urne qui contient deux boules vertes et cinq boules rouges, on tire une boule au hasard. On note X la VAR qui vaut 1 si la boule tirée est verte et 0 sinon.
3. Dans un jeu de 32 cartes, on tire quatre cartes au hasard. On note X le nombre de rois tirés.
4. Dans une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules bleues et 2 boules vertes, on tire quatre boules successivement avec remise. On appelle X le nombre de boules vertes tirées.
5. Dans une urne contenant 5 boules rouges, 5 boules bleues et 2 boules vertes, on tire quatre boules simultanément. On appelle X le nombre de boules vertes tirées.
6. Dans une classe contenant n élèves, il y a p filles et $n - p$ garçons. On prend trois élèves au hasard pour faire un groupe de colle. On note X le nombre de filles dans le groupe de colle.
7. Une expérience a une probabilité p de réussir. On répète n fois cette expérience de façon indépendante. On note X le nombre d'expériences qui ont réussi.
8. On lance quatre fois de suite une pièce équilibrée. On note X le nombre de séquence(s) pile-face obtenue(s) (par exemple, on a, avec des notations évidentes : $X(PPFP) = 1$, $X(FPPP) = 0$).

Exercice 3

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. on effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage on remet dans l'urne la boule tirée et on ajoute, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, X_n prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ et que $P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Exercice 4

N urnes contiennent chacune n jetons numérotés de 1 à n . On tire au hasard un numéro dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros tirés.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
2. Trouver la loi de X et son espérance.

Exercice 5

Soit X une v.a.r. finie prenant ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ et telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(X = k) = ak + b$$

avec a et b deux paramètres réels. Trouver a et b pour que X soit une variable centrée.

Exercice 6

On considère une urne qui contient 4 boules vertes et 2 boules blanches. On tire successivement 3 boules sans remise, et on appelle N la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes. Donner la loi de N et calculer son espérance et son écart-type.

Exercice 7

Un sac contient 10 jetons dont 4 rouges et 6 blancs. On extrait les jetons un à un, sans remise. Soit X la v.a.r. « rang du premier jeton rouge tiré ». Trouver la loi de X , puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$. On pourra introduire les événements A_j : « le j -ième tirage amène un jeton blanc ».

Exercice 8

Une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 1 euro et 3 roues tournent ; ces roues présentent les dix chiffres 0 à 9 et chaque roue s'arrête en montrant un chiffre au hasard. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise. S'il y a un « double » le joueur touche 2 euros et s'il y a un « triple » le joueur touche y euros (y est un entier). Pour quelles valeurs de y le jeu est-il favorable au tenancier ?

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une VAR X a pour espérance $\frac{1}{2}$ et pour variance $\frac{1}{4n}$. Donner une condition sur n pour que la valeur de X soit strictement compris entre 0.4 et 0.6 avec une probabilité supérieure ou égale à 0.9.

Exercice 11

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant “ pile ” avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et “ face ” avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k -chaîne de “ pile ” une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés “ pile ”, cette suite devant être suivie d’un “ face ” ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[[1, n]]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k -chaînes de “ pile ” obtenues au cours des n lancers.

Pour tout k de $[[1, n]]$, on pourra noter P_k l’événement “ on obtient “ pile ” au k^{eme} lancer ”.

Par exemple, avec $n = 11$, si l’on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[[1, n,]]$ l’espérance de Y_k , notée $E(Y_k)$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un entier de $[[1, n - 2]]$

Pour tout i de $[[1, n]]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k -chaîne de “ pile ” commence au i^{eme} lancer et qui vaut 0 sinon.

- a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
- b) Soit $i \in [[2, n - k]]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.
- c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
- d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.