DS 7 (durée 2h30)

Le sujet comporte deux pages et trois problèmes indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème 1 : Noyaux et images des itérés d'un endomorphisme

1. Dans cette question, on considère l'application g définie par :
   $g(x, y, z) = (-x - 11y - 9z, -x + 7y + 9z, -6y - 6z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer la matrice associée à g dans les bases canoniques.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de g ainsi que leur dimension respective.
   (c) L'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (d) Déterminer l'expression de g^2.
   (e) Déterminer le noyau et l'image de g^2 ainsi que leur dimension respective.
   (f) Vérifier que $Ker(g) \subset Ker(g^2)$.
   (g) Vérifier que $Im(g^2) \subset Im(g)$.
2. On travaille dans cette question sur un endomorphisme quelconque h de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $Ker(h) \subset Ker(h^2)$
   (b) Montrer que $Im(h^2) \subset Im(h)$.

Problème 2 : diagonalisation

1. On note $E = \{(a - b, 2b, a + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
   et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x - y + z = 0, x + y + 3z = 0\}$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel, en déterminer une base $\mathcal{E}$, et la dimension. On fera en sorte que tous les vecteurs de la base aient pour première coordonnée 1.
   (b) Montrer que F est un espace vectoriel, en déterminer une base $\mathcal{F}$ et la dimension. On fera en sorte que tous les vecteurs de la base aient pour première coordonnée 1.
   (c) Montrer que $E \cap F = \{0\}$.
2. On note à présent $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Montrer que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
   (c) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

3. On note u la fonction définie par
   $u(x,y,z) = (-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z, 3x + y - 3z, -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa matrice associée dans les bases canoniques.
   (b) Montrer que u est bijective et déterminer sa réciproque.
   (c) Montrer que $\forall e \in E, u(e) = -2e$ et que $\forall f \in F, u(f) = 4f$.
   (d) On pose $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,-2,-1),(1,2,-1))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (e) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Problème 3 : endomorphismes cycliques

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note Id l'application identité de E. Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = Id$ et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément $a \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1 $f^p(a) = a$

2 la famille $(a, f(a)..., f^{p-1}(a))$ est génératrice de E

3 la famille $(a, f(a)..., f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

Dans ce cas, la famille $(a, f(a)...f^{p-1}(a))$ est alors appelé un cycle de f.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^2$. On pose f définie par $f(x,y) = (-y,x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   (b) En considérant $a = (1,0)$, montrer que f est cyclique d'ordre p, l'entier p étant à préciser.
2. Dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E, cyclique d'ordre p. Soit $(a, f(a), ...f^{p-1}(a))$ un cycle de f.
   (a) Montrer que $p \geq n$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.
   (c) En déduire que $f^p = Id$.
   (d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
   (e) On note m, le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(a, f(a), ...f^{k-1}(a))$ est libre.
      i. Montrer que m existe.
      ii. Montrer que $f^m(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs a, $f(a)$,..., $f^{m-1}(a)$.
      iii. Montrer par récurrence que pour tout entier k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(a)$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs a, $f(a)$,... $f^{m-1}(a)$.
      iv. En déduire que $m = n$ et que la famille $(a, f(a), ...f^{n-1}(a)$ est une base de E.
      v. Écrire la matrice de f dans cette base.