Synthèse développements limités

Définition : : Soit f une fonctions définie au voisinage de 0. On dit que f est négligeable devant x^n en 0 si il existe une fonction ϵ définie au voisinage de 0 telle que : $f(x) = \epsilon(x)x^n$ au voisinage de 0 et $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

Propriété :f est négligeable devant x^n au voisinage de 0 ssi $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n} = 0$.

Définition : Soit f une fonction définie en au voisinage de 0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe $n+1$ réels $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tel que, au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Remarque :Il est équivalent de dire que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $n+1$ réels et ε une fonction qui admet 0 pour limite en 0 tels que : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n\varepsilon(x)$

Définition : Soit f une fonction définie en au voisinage de x_0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe $n+1$ réels $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tel que, au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

Propriété : Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre p en 0 pour tout $p \in [|0; n|]$.

Propriété :

1. Une fonction f possède un développement limité en 0 d'ordre 0 si et seulement si elle est possède une limite en 0. Si f n'est pas définie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0.
2. Une fonction f possède un développement limité d'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en 0. Si f n'est pas définie en 0, elle est prolongeable en une fonction dérivable en 0.

Propriété : Soit f une fonction qui possède un Dl d'ordre n au voisinage de 0. Soient $(a_0, ..., a_n)$ et $(b_0, ..., b_n)$ $2n+2$ réels tels que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.

Alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in [|0; n|]$.

Définition : Si f possède au voisinage de 0 un Dl d'ordre n alors le polynôme dans le développement est unique, on l'appelle partie régulière du développement limité de f en 0.

Propriété : Si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière du développement de f au voisinage de 0 à l'ordre n alors $\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ est la partie régulière du développement de f à l'ordre p au voisinage de 0 pour tout $p \in [0; n|]$.

Propriété : Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Alors si f est paire tous les termes d'ordre impair de la partie régulière sont nulles et si f est impaire, tous les termes d'ordre pair de la partie régulière sont nuls.

Propriété :(Taylor Young) Soit f une fonction de classe $\rfloor^n$ sur un intervalle I contenant x_0 alors au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + ((x - x_0)^n)$

Propriété : Au voisinage de 0 :

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
5. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Propriété : Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie et continue sur I possédant un Dl à l'ordre n au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Si F est une primitive de f sur I alors F possède un Dl à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

Propriété : Au voisinage de 0 : $ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de 0 et admettant au voisinage de 0 un dl d'ordre n de partie réguière P et Q respectivement. Alors $f + g$ admet un dl à l'ordre n au voisinage de 0 de partie entière $P + Q$ et fg admet un dl à l'ordre n au voisinage de 0 de partie entière R où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Propriété : Soit f une fonction admettant en 0 un dl à l'ordre n et telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et soit g une fonction admettant en 0 un dl à l'ordre n. On suppose $f(D_f) \subset D_g$ et on note P et Q les parties régulières respectives de f et g. Alors $g \circ f$ admet au voisinage de 0 un dl d'ordre n de partie régulière R où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans $Q \circ P$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Propriété : Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et dont la partie régulière $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est non nulle. Si p est le plus petit indice telle que a_p est non nul alors $f(x) \sim a_p x^p$ au voisinage de 0.

Soit f une fonction qui possède un développement à l'ordre $n > 1$ au voisinage de x_0. Alors f est dérivable en x_0 et admet un développement limité du type $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o(x^p)$ avec $a_p \neq 0$.

On sait que $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. Le terme suivant dans le développement donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

En effet $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ a le signe de $a_p(x - x_0)^p$. Si p est pair, cette quantité est du signe de a_p, sinon, l'expression change de signe en x_0 et la courbe présente un point d'inflexion (c'est à dire, la tangente traverse la courbe).

On pose $X = \frac{1}{x}$ et on recherche un développement limité de $Xf(X)$, au moins à l'ordre 1, sinon plus pour connaître la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Propriété :

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $f'(x)$ peut être approché par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^3$, alors $f'(x)$ peut être approché par $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.