Exercices : Couple de VAR

Exercice 1

Soit X une VAR dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6

On pose $Y = X^2$

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) puis la loi de Y.
2. Déterminer la covariance de X et Y. Les VAR X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètres respectifs p et r telles que $Cov(X,Y) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit X (resp Y) la VAR égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y), en déduire les lois de X et Y.
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.
3. X et Y sont-elle indépendantes.

Exercice 4 :

Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

1. Déterminer la loi du couple (T,V).
2. Déterminer la covariance de T et V.
3. T et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel non nul, p et p' des réels appartenant à $]0;1[$. On considère deux VAR X et Y à valeurs dans $[|0;n|]$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et que pour tout $k \in [|0;n|]$, la loi de Y conditionnelle à $[X=k]$ est $\mathcal{B}(k,p')$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 6 :

Une urne contient N boules blanches ou noires. La proportion de boules blanches étant p et celle de boule noire étant $1-p=q$. On tire n boules de l'urne simultanément. On note X le nombre de boules blanches tirées.

On suppose qu'on numérote les boules blanches de 1 à Np. On note, pour $i \in [|1,Np|]$, X_i la VAR égale à 1 si la i^{eme} boule blanche est tirée et 0 sinon.

1. Rappeler la loi de X.
2. Calculer, pour tout $i \in [|1; Np|]$ l'espérance et la variance de X_i.
3. Calculer pour i et j dans $[|1; Np|]$, $i \neq j$, la covariance de (X_i, X_j).
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 7 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré.

Initialement l'urne U_1 contient les boules 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules $3, 4, 5$ et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de l'urne U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   (b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
4. (a) Exprimer la loi de X_{n+1} en fonction de la loi de X_n.
   (b) En déduire l'expression de l'espérance de X_{n+1} en fonction de celle de X_n.
   (c) Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Quelle interprétation donner de ce résultat ?

Exercice 8 :

1. En utilisant le polynôme P défini par $P(\lambda) = Cov(X + \lambda Y, X + \lambda Y)$, montrer que $|\ Cov(X, Y)\ | \leq \sigma(X)\sigma(Y)$
2. On suppose que X, Y sont des VAR finies de variances non nulles. On appelle coefficient de corrélation linéaire, le réel $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. Montrer que $\rho(X, Y) \in [-1; 1]$. A quelle condition $\rho(X, Y) = \pm 1$?