Chapitre 22 : Couple de VAR

Définition : On appelle couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, P(\omega))$ toute application : $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ où X et Y sont des VAR sur $(\Omega, P(\omega))$. On note $Z = (X, Y)$ ce couple de VAR.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de VAR sur l'espace probabilisable fini $(\Omega, P(\Omega))$. On note $X(\Omega) = (x_1, ..., x_n)$ et $Y(\Omega) = (y_1, ..., y_p)$. Alors la famille d'événements $([X = x_i] \cap [Y = y_j])_{(i,j)\in[|1,n|]\times[|1,p|]}$ est un système complet d'événements appelé système complet d'événements associé au couple (X, Y).

Définition : Soit (X, Y) un couple de VAR réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. L'application $P_{(X,Y)} : (x, y) \mapsto P([X = x] \cap [Y = y])$ définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est appelée loi du couple (X, Y) ou loi conjointe des VAR X et Y.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de VAR de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Si $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{p} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^{p}(\sum_{i=1}^{n} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1$$

Définition : Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$, la loi de X est appelé première loi marginale du couple et la loi de Y est appelé deuxième loi marginale du couple.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$. Alors

$$\forall i \in [|1; n|], P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]$$

Définition : Soit (X, y) un couple de VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, l'application $x \mapsto \frac{P([X=x]\cap[Y=y]}{P([Y=y])} = P_{[Y=y]}([X = x]) = P([X = x]/[Y = y])$, définie sur $X(\Omega)$ est appelée loi conditionnelle à $[Y = y]$ de X.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$. On suppose que $P([X = x_i]) \neq 0 \forall i \in [|1; n|]$ et que $P([Y = y_j]) \neq 0 \forall j \in [|1; p|]$. Alors $\forall (i, j) \in [|1; n|] \times [|1; p|]$

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P_{[X=x_i]}([Y = y_j])P(X = x_i) = P_{[Y=y_j]}([X = x_i])P(Y = y_j)$$

$$P([X = x_i]) = \sum_{j=1}^{p} P_{[Y=y_j]}([X = x_i])P(Y = y_j)$$

Définition : Soit (X, y) un couple de VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$ et soit $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors l'application Z définie par $\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (u(X(\omega), Y(\Omega)$ est une VAR notée $u(X, Y)$.

Propriété : Soit (X, y) un couple de VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$ et soit $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors la loi de probabilité de $Z = u(X, Y)$ est définie, pour tout $z \in Z(\Omega)$ par

$P(Z = z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega), u(x,y)=z} P([X = x] \cap [Y = y])$

Propriété : Soit (X, y) un couple de VAR sur un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. On suppose que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont inclus dans $\mathbb{N}$. Alors $(X + Y)(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in (X + Y)(\Omega)$,

$P(X + Y = k) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=k} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=0}^{k} P([X = i] \cap [Y = k - i])$

Définition : On dit que deux var X et Y d'un même espace probabilisé $(\Omega, P(\omega), P)$ sont indépendantes si

$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$

Propriété : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Les VAR X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute partie E de $X(\Omega$ et toute partie F de $Y(\Omega)$, les événements $[X \in E]$ et $[Y \in F]$ sont indépendants.

Propriété : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute fonction $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et toute fonction $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(X)$ sont des VAR indépendantes.

Définition : Les VAR $X_1, ..., X_n$ de l'espace $(\Omega, P(\omega), P)$ sont indépendantes deux à deux si pour tout i et j distincts dans $[|1; n|]$n les VAR X_i et X_j sont indépendantes.

Définition : Les VAR $X_1, ..., X_n$ de l'espace $(\Omega, P(\omega), P)$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$,

$P([X_1 = x_1] \cap ... \cap [X_n = x_n]) = P([X_1 = x_1])...P([X_n = x_n])$.

Propriété : Si $(X_1, .., X_n)$ est une famille de n VAR mutuellement indépendantes alors toute sous-famille est formée de VAR mutuellement indépendantes.

Propriété : Si les variables aléatoires réelles $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

Propriété : Si $X_1, ...X_n$ sont n VAR indépendantes, alors pour toute fonction $f : X_1(\Omega) \times ... \times X_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ et toute fonction $g : X_{p+1} \times ... \times X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$, les VAR $f(X_1, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.

Propriété : Si $X_1, ..., X_n$ sont n VAR indépendantes, alors pour toutes familles $(f_1, ..., f_n)$ de fonctions qui vérifie $f_i : X_i(\Omega) \to \mathbb{R}, \forall i \in [|1; n|]$, les VAR $f_1(X_1), ..., f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Propriété : Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$ et $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, ..., y_p\}$. L'espérance de la VAR $Z = u(X,Y)$ est donnée par
$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} u(x_i; y_j) P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

Propriété : Si $X_1, ...X_n$ sont n VAR définies sur un même espace $(\Omega, P(\omega), P)$, alors
$E(X_1 + ... + X_n) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.

Définition : Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. On appelle covariance de X et Y le réel, noté $Cov(X,Y)$ définie par
$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))$

Propriété :(théorème de Koenig Huygens) Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. La covariance de X et Y est donnée par la formule :
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriété : Soient X, X', Y des VAR définies sur un même espace $(\Omega, P(\omega), P)$ et λ un réel.

1. $Cov(X,X) = V(X)$
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
3. $Cov(\lambda X + X', Y) = \lambda Cov(X,Y) + Cov(X', Y)$

Propriété : Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$. Alors
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$

Propriété : Soit $X_1, ..., X_n$ une famille de n VAR sur $(\Omega, P(\omega), P)$. Alors
$V(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$
Propriété : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$, indépendantes ;

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$
2. $Cov(X,Y) = 0$
3. $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Propriété : Si $X_1, ..., X_n$ sont n VAR définies sur un même espace pobabilisé, deux à deux indépendantes,
$V(X_1, ..., X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

Propriété : Si (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de l'espace probabilisé fini $(\Omega, P(\omega), P)$, indépendantes, suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m,p) et (n,p) alors la somme $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(m+n, p)$

Propriété : Si $X_1, ..., X_n$ sont n VAR iid suivant une loi de Bernoulli de paramètres p alors $X_1 + ... + X_n$ suit une loi binomiale de paramètre (n,p).