Chap 9 : Différentiabilité

Dans ce chapitre, I est un intervalle de R non vide, non réduit à un point.

I. Calcul différentiel

1.1 Dérivées partielles

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $M_0 \in D$, l un réel.
On dit que f admet l pour limite en M_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \forall M \in D, (d(M_0, M) \leq \eta \Rightarrow |f(M) - l| \leq \varepsilon)$$

.

f est continue en M_0 si f admet pour limite $f(M_0)$ en M_0.
f est continue sur D si f est continue en tout point de D.

Définition : Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, soit f une fonction définie sur D à valeur dans $\mathbb{R}$ et soit $A = (a_1, ...a_n)$ un point de D. Pour tout $i \in [|1;n|]$, si la fonction partielle f_i en A est dérivable en a_i, le nombre dérivé s'appelle nombre dérivé partiel de f par rapport à x_i en A et on le note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

Remarque :On note parfois f'_{x_i} pour $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

Définition : Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur D. On appelle dérivée partielle première suivant la i^{me} variable, et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la fonction qui à tout élément A de D associe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

Cette fonction est définie en tout point de D où f admet un nombre dérivé partiel par rapport à la i^{me} variable.

Exemple :

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ uen fonction possédant une dérivée partielle suivant la i^{me} variable. Cette dérivée est elle-même une fonction de plusieurs variables. Si elle possède une dérivée partielle suivant la j^{me} variable, on appelle cette nouvelle fonction la dérivée partielle seconde de f suivant la variable i et la variable j. On note $\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$ et $\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ et $f : D \to \mathbb{R}$ et $A \in D$. Si f admet des dérivées partielles par rapport aux n variables en A, on appelle gradient de f en A le vecteur de $\mathbb{R}^n$ définie par $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$.

On note ∇f_A ou $\nabla f(A)$ ou encore $\overrightarrow{grad} f(A)$ le gradient de f en A.

Exemple :gradient de $f(X) = ||X||^2$ pour $X \in \mathbb{R}^n$.

Définition : On appelle point critique d'une fonction à n variables, tout point A de $\mathbb{R}^n$ àù le gradient de f s'annule.

1.2 Opérations sur les dérivées partielles

Propriété :

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$, λ un réel.

Si f et g possèdent sur D des dérivées partielles par rapport à x_i alors $f+g$ fg, λf possèdent aussi des dérivées partielles par rapport à x_i. De plus :
$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \lambda f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Propriété : Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, f et g deux applications de D dans $\mathbb{R}$, λ un réel.

Si f et g possèdent sur D des dérivées partielles par rapport à x_i alors
$\nabla(f+g)_A = \nabla(f)_A + \nabla(g)_A$, $\nabla(\lambda f)_A = \lambda \nabla(f)_A$ et $\nabla(fg)_A = f\nabla(g)_A + g\nabla(f)_A$.

Propriété : Soient $D \subset \mathbb{R}^n$, f une fonction de D dans R admettant des dérivées partielles continues sur D, $(u_1, ..., u_n)$ n fonctions dérivables sur un intervalle I ed $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout $t \in I$, $(u_1(t), ..., u_n(t) \in D$.

La fonction g définie de I dans R par $g(t) = f(u_1(t), ..., u_n(t)$ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1(t), ..., u_n(t))u_1' + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u_1(t), ..., u_n(t))u_n'(t)$$

<u>Exemple :</u>$t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, $t \mapsto f(2t^2, \ln(t), 1-t)$.

Propriété : Soit D une partie de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues sur D, $x_1, ..., x_n$ des fonctions définies de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles sur un sous ensemble Ω de R^p et vérifiant, pour tout $(u_1, ..., u_p) \in \Omega$, $(x_1(u_1, ..., u_n), x_n(u_1, ..., u_n)) \in D$.

La fonction g définie de Ω dans $\mathbb{R}$ par

$$g(u_1, ..., u_n) = f(x_1(u_1, ..., u_n), ..., x_n(u_1, ..., u_n))$$

admet des dérivées partielles sur Ω et

$$\forall i \in [|1;p|], \frac{\partial g}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i}$$

<u>Exemple :</u>$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.