TD : Compléments sur les équations différentielles

I. Méthode de la variation de la constante

Propriété : Soit (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. On suppose qu'il existe une fonction A, dérivable sur I et qui vérifie $A'(t) = a(t), \forall t \in I$. Alors pour tout réel C, la fonction $y_H(t) = Ce^{-A(t)}$ définie et dérivable sur I, est solution de l'équation homogène (E_H).

Pour déterminer une solution particulière, on peut poser $y_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où C est une fonction de classe C^1 à déterminer.

Exemple :En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre les équations suivantes :

1. $y' - y = (x+1)e^x$
2. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
3. $xy' + y = e^x$
4. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$
5. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
6. $(1+e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$

II. Équations autonomes

Définition : On appelle équation différentielle autonome d'ordre 1, toute équation du type $y'(t) = f(y(t))$ où f est une fonction à valeur réelle, continue sur un intervalle I.

Remarque :Attention : ces équations ne sont pas linéaires. On ne peut pas appliquer le principe de superposition !

Exemple :Résoudre les équations différentielles autonomes du premier ordre suivantes :

1. $y' = y$
2. $y' = 1 + y^2$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
3. $y' - y^2 = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. $y' + e^y = 0$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' = sin(y)$ sur $\mathbb{R}$ (poser $u(t) = \cos(y(t)$ pour calculer l'intégrale).

Exemple :d'application en biologie (Problème d'évolution de population)

La dynamique des population s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants..

1. Le modèle de Malthus (1761-1834) considère que l'augmentation de la population est proportionnelle à la population.
   (a) Déterminer l'équation vérifiée par la taille de la population, N, dans ce modèle.
   (b) La résoudre.
   (c) Critiquer ce modèle.

2. Vers 1840, Verhulst propose d'améliorer ce modèle en introduisant un facteur qui tienne compte de la capacité d'accueil du milieu et introduit dans l'équation différentielle un facteur qui tend vers 0 quand N tend vers sa taille maximale, fixée, K. L'équation devient : $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$ avec r et K, constantes.
   (a) Résoudre cette équation en posant $y = \frac{1}{N}$ (on suppose que N ne s'annule pas).
   (b) On pose $N(0) = 1, K = 100, r = 0.6$. Étudier la fonction N et la représenter sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vers 1825, Gompertz propose, avec la même idée que Verhulst, l'équation $N'(t) = rN\ln(\frac{K}{N})$.
   (a) Résoudre cette équation autonome.
   (b) Avec les mêmes valeurs que dans la questions précédentes, étudier la solution obtenue.