DM 1

Exercice 1 (Sommes géométriques)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{j=0}^{n} (\sum_{k=j}^{n} 2^k)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. En déduire, à l'aide d'un changement d'indice, la valeur de $\sum_{k=p}^{q} x^k$ avec p et q deux entiers naturels vérifiant $q \geq p$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n2^{n+1} + 1$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

Exercice 2 (Sommes d'entiers)

On pose $s(1) = 1$, $s(2) = 3+5$, $s(3) = 7+9+11$,... de sorte que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1. Calculer $s(i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de $s(n), n \in \mathbb{N}^*$?
2. (a) On note $I(k)$ le k^{eme} entier naturel impair (avec $k \in \mathbb{N}^*$). Exprimer $I(k)$ en fonction de k.
   (b) On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S(N) = \sum_{k=1}^{N} I(k)$. Calculer $S(N)$.
   (c) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $T(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i)$.
   (d) En déduire la valeur de $s(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A l'aide des résultats précédents, donner la valeur de $\sum_{i=1}^{n} i^3$ en fonction de n.