

Chapitre 4 Synthèse trigo et propriétés des fonctions d'une ou plusieurs variables

Définition : P : plan muni d'un repère orthonormé orienté. C : cercle trigonométrique. A : point de coordonnée $(1, 0)$. T : tangente au cercle en A

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut associer un unique point M à x sur C : l'arc de cercle AM a pour longueur $|x|$ (parcours dans sens direct si $x \geq 0$ dans le sens indirect sinon).

$\cos(x)$ est la valeur de l'abscisse du point M , $\sin(x)$ est la valeur de l'ordonnée de x $\tan(x)$ est l'ordonnée du point d'intersection de T et de la droite OM (quand il existe).

Propriété :

1. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
2. $\cos(0) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(0) = 0$; $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$;
 $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\tan(0) = 0$; $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$; $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$;
 $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$; $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$; $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$; $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$;
 $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$; $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Propriété : Soient a et b deux nombres réels.

1. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$
3. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
4. $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
5. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
6. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
7. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
8. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
9. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

Définition : $x \in [-1; 1]$. $\arcsin(x)$ est l'unique réel dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\arcsin(x)) = x$.
 $x \in [-1; 1]$. $\arccos(x)$ est l'unique réel dans $[0; \pi]$ tel que $\cos(\arccos(x)) = x$.
 $x \in \mathbb{R}$. $\arctan(x)$ est l'unique réel dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan(\arctan(x)) = x$.

Propriété : $\forall (x, y) \in [-1; 1] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$.

$\forall (x, y) \in [-1; 1] \times [0; \pi]$; $y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$.

Remarque : attention aux intervalles !

2. Propriété des fonctions d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, D est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur D et λ un réel.

- Le produit de f par λ est la fonction notée λf et définie par $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x), \forall x \in D$.
- La somme de f et g est la fonction notée $f+g$ et définie par $f+g : x \mapsto f(x)+g(x), \forall x \in D$.
- Le produit de f et g est la fonction notée fg et définie par $fg : x \mapsto f(x)g(x), \forall x \in D$.
- Si g ne s'annule pas sur D . Le quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ et définie par $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D$.

Définition : f définie sur D_f et g définie sur D_g . OSQ $f(D_f) \subset D_g$.

L'application $g \circ f$, appelée composée de f par g , est définie par $g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in D_f$.

Définition : f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ est une fonction bijective si il existe une fonction g définie sur $D_g = f(D_f)$ telle que :

- $f \circ g(x) = x, \forall x \in D_g$ et $g \circ f(x) = x, \forall x \in D_f$.
- g est la réciproque de f , notée f^{-1} .

Définition :

1. D_f est symétrique par rapport à : $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$.
2. $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Définition : Soit t un réel non nul, f définie sur D est t -périodique si :

1. $\forall x \in D_f, x - t \in D_f$ et $x + t \in D_f$.
2. $\forall x \in D_f, f(x + t) = f(x)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f et soit I un intervalle inclus dans D_f .

1. On dit que f est croissante sur I (resp. strictement croissante sur I) lorsque f conserve le sens des inégalités :
 $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, (resp. $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).
2. On dit que f est décroissante sur I (resp. strictement décroissante sur I) lorsque f inverse le sens des inégalités :
 $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, (resp. $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).
3. On dit que f est constante sur I lorsque : $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Définition : Si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I , f est (strictement) monotone sur I .

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur I et λ un réel.

1. Si λ est positif λf a le même sens de variation que f .
2. Si λ est négatif λf a le sens de variation contraire à celui de f .
3. Si f et g ont le même sens de variation $f + g$ a également le même sens de variation.

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies sur des intervalles I et J respectivement. On suppose $f(I) \subset J$.

1. Si f et g ont le même sens de variation sur I et J alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g ont des sens de variations contraires sur I et J alors $g \circ f$ est décroissante.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f et I un sous ensemble de I .

1. On dit que f est majorée (resp. minorée) sur I lorsque :
 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$, (resp $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$)
2. On dit que f est bornée sur I lorsque f est à la fois majorée et minorée sur I .

Propriété : Si f est bornée sur I , il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leq k$.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f .

1. On dit que f admet un minimum (resp. un maximum) global en x_0 lorsque $x_0 \in D_f$ et
 $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0)$, (resp. $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$)
 Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est le minimum (resp. le maximum) de f sur D_f .
2. On dit que f admet un minimum (resp. un maximum) local en x_0 lorsque
 $\exists \epsilon, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$, (resp $\exists \epsilon, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$).

Définition : On dit qu'une fonction f admet un extremum (global ou local) lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum (global ou local).

3. Fonctions de plusieurs variables réelles

Définition : On appelle fonction numérique de n variables réelles toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Définition : L'ensemble de définition d'une fonction de n variables est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas où $n = 2$, on peut représenter graphiquement cet ensemble de définition.

Définition : Considérons une fonction f de n variables et $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [1; n]$, la i^{eme} fonctions partielle en A est la fonction f_i d'une variable définie par $f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Définition : Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}^2$ une fonction de deux variables. On appelle surface représentative de f l'ensemble $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$.

Définition : Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel λ , on appelle courbe de niveau λ l'ensemble des éléments de D tels que $f(x, y) = \lambda$.