

DM 1 : Étude d'une famille de polynômes

Soit a un nombre réel. On pose P_a un polynôme du second degré à coefficients dans \mathbb{R} défini par :

$$P_a(X) = X^2 + (a + 5)X + (a + 4)$$

On se propose dans cet exercice d'étudier quelques propriétés de P_a en fonction des valeurs de a .

1. Montrer que pour tout réel a , P_a possède deux racines réelles distinctes et les déterminer.
2. Montrer que pour tout n entier naturel, $P_n(n)$ est pair.
3. Soit n un entier naturel non nul. Montrer l'équivalence suivante :

$$n \text{ pair} \Leftrightarrow P_n(n - 1) \text{ est pair}$$

4. Écrire $P_n(X)$ sous forme canonique.
5. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, P_a(x) \geq -\frac{(a+3)^2}{4}$.
6. Déterminer le minimum de l'ensemble $\{P_a(x), x \in \mathbb{R}\}$.
7. Dans cette question, on note $I =]-\frac{a+5}{2}; +\infty[$ et on pose $(\alpha, \beta) \in I^2$.
 - (a) Montrer que $P_a(\alpha) - P_a(\beta) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + a + 5)$.
 - (b) Montrer l'implication : $\alpha \leq \beta \Rightarrow P_a(\alpha) \leq P_a(\beta)$.
8. Résoudre l'équation $P_a(x) = \frac{a+4}{x+1}$ sur l'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en fonction des valeurs de a .