DS 1 (durée 2h30)

Le sujet comporte deux pages, cinq exercices. Les exercices sont deux à deux indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation (2 points).

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Exercice 1 (logique et ensembles - 8 points)

1. Pour chacune des assertions suivantes, écrire sa négation puis dire si l'assertion de départ est vraie ou fausse en justifiant :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 - n = 2k$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy < 0$
   (c) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, xy < 0$
   (d) $\forall m \in \mathbb{R}_+, \sqrt{m} \leq m$.
2. On note $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0\}$, $F = \{(a, a+3), a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, 3-b), b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + 2y - 2 = 0$.
   (a) Montrer que $E = F$.
   (b) Déterminer la liste explicite des éléments de $E \cap G$.

Exercice 2 (fonctions logarithme et exponentielle - 11 points)

On note $f(x) = \ln(\frac{x^3-1}{x^3+1})$.

1. Montrer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}$ et $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$
2. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
3. Montrer que $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$. Comment cette propriété se traduit-elle géométriquement sur la courbe de f ?
4. Déterminer le signe de f sur D_f.
5. Déterminer le réel b qui vérifie $\frac{x^3-1}{x^3+1} = 1 + \frac{b}{x^3+1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 1$.
6. En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Comment cette propriété se traduit-elle géométriquement sur la courbe de f ?
7. Résoudre l'équation $f(x) = \ln(x-1)$ dans D_f.
8. On pose $g(x) = (\frac{e^x+1}{1-e^x})^{\frac{1}{3}}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g.
   (b) Calculer $f \circ g(x)$ pour $x \in D_g$.
   (c) Calculer $g \circ f(x)$ pour $x \in D_f$.
   (d) Que peut-on en conclure sur f et g ?

Exercice 3 (Fonctions trigonométriques - 11 points)

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \arctan(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}), \forall x \in D$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de φ.
2. (a) Tracer la courbe de la fonction arctangente.
   (b) Donner, avec une justification graphique, la parité de la fonction arctangente.
   (c) Montrer que $\forall x \in D, \varphi(1+x) = -\varphi(1-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe de φ ?
3. (a) Redémontrer la formule permettant d'exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
   (b) En déduire l'expression de $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$. Pour quelles valeurs de a cette expression est-elle valable ?
4. On pose $A = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$.
   (a) Calculer $\tan(A)$.
   (b) En déduire que $A = \frac{\pi}{4}$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0;2[, \varphi(x) = -2\arctan(x-1)$.
6. Tracer la représentation graphique de φ sur $]0,2[$.

Exercice 4 (Résolution d'équations de degré 3 - 5 points)

On pose $r = (20+14\sqrt{2})^{1/3} + (20-14\sqrt{2})^{1/3}$.

1. Développer $(a+b)^3$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $r^3 = 40 + 6r$.
3. On pose $P(X) = X^3 - 6X - 40$.
   (a) Montrer que 4 est une racine de P.
   (b) Déterminer trois réels a, b, c tels $P(x) = (x-4)(ax^2+bx+c)$.
   (c) En déduire l'ensemble des racines de P.
   (d) Donner une expression simple de r.

Exercice 5 (Résolution d'une équation trigonométrique - 3 points)

Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.