DS 1 (durée 3h00)

Le sujet comporte 4 exercices et un problème indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Exercice 1 (Méthodes sur les calculs de sommes - 4 points)

1. Rappeler, sans calcul, l'expression de $\sum_{k=0}^{n} 1$ et $\sum_{k=0}^{n} k$.
2. Démontrer que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. En calculant $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4$ de deux manières, déterminer l'expression de $\sum_{k=0}^{n} k^3$ en fonction de n.

Exercice 2 (Étude en 0 d'Arctan - 6 points)

On pose $f(x) = \arctan(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la droite $T : y = x$ est la tangente à la courbe de f en 0.
2. Déterminer la position de la courbe de f par rapport à T.
3. Tracer la courbe de f en faisant apparaître les résultats précédents.

Exercice 3 (Méthodes pour l'étude d'une fonction - 8 points)

On définit une fonction f par $f(x) = (x-1)(1+e^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = 1 + (2-x)e^{-x}$ pour tout x réel.
2. Déterminer le tableau de variations de f' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ (on calculera $f(0)$).
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
6. Tracer la courbe représentative de f.
7. On pose $g(x) = (x-1)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer une primitive de g en effectuant une primitive par parties.
   (b) En déduire une primitive de f.

Exercice 4 (Méthodes sur les complexes - 6 points)

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer sa partie réelle, sa partie imaginaire, son module et un argument.

1. $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}$
2. $z_2 = e^{ix} + e^{3ix}$ avec $x \in]\frac{\pi}{2};\pi[$

Problème 1 (Racines de l'unité - 26 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un premier temps, on cherche à résoudre l'équation (E_n) : $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Les solutions de cette équations sont appelées "racines n-emes de l'unité".
Dans un second temps, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions de cette équations.

1. Dans cette question, on résout (E_n) :
   (a) Résoudre (E_n) dans le cas où $n = 2$.
   (b) Dans le cas $n = 3$, déterminer une solution évidente α de (E_3) puis, en déterminant deux réels a et b qui vérifient $z^3 - 1 = (z-\alpha)(z^2 + az + b)$, déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$.
   (c) A partir de maintenant, on revient au cas général avec un n entier naturel non nul quelconque. Résoudre l'équation (E_n) en écrivant z sous forme exponentielle.
2. Dans cette partie on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$
   (a) Comparer z_k et $z_{k'}$ lorsque $k' = k + rn$ avec $r \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que $\forall k \in [|0; n-1|]$, $\overline{z_k} = z_{n-k}$.
   (c) Montrer que $\forall k \in [|0; n-1|]$, $z_k = (z_1)^k$.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.
   (e) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ pour $n > 1$.
   (f) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$ pour $n > 1$.
   (g) Dans cette partie, on pose $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k$
      i. Montrer que $P^2 = 1$
      ii. En déduire les valeurs possibles de P.
      iii. Faire le calcul pour $n = 2$ puis pour $n = 3$. En déduire une conjecture sur la valeur de P (on ne démontrera pas cette conjecture).
   (h) On considère à présent l'équation : (F) : $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$
      i. Déterminer une écriture des solutions avec des racines carrées en résolvant l'équation à l'aide du binôme de Newton.
      ii. Montrer que (F) est équivalente à l'équation : (F') : $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k \in [|1;4|]$
      iii. En déduire que l'ensemble des solutions de F est $\{-i\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}}, k \in [|1;4|]\}$.