DM 3 : Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On se propose de calculer les puissances de A de différentes manières. I désignera la matrice identité d'ordre 3 et O_3 la matrice nulle d'ordre 3. Les trois questions sont indépendantes.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   1-a

   Démontrer que P est inversible et donner son inverse.

   1-b

   Calculer $D = P^{-1}AP$

   1-c

   Démontrer que pour tout n entier naturel, $D^n = P^{-1}A^nP$ puis en déduire l'expression de A^n pour tout n entier naturel.

   1-d

   Justifier que D est inversible. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

2. On pose $B = A - 2I$

   2-a

   Pour tout entier naturel n, donner l'expression de B^n en fonction de B.

   2-b

   En déduire l'expression de A^n en fonction de A, I et n.

3. **3-a**

   Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O_3$.

   3-b

   En déduire que A est inversible et donner son inverse.

   3-c

   Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que pour tout entier naturel n, $A^n = a_nA + b_nI$.

   Donner les relations de récurrence définissant $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

   3-d

   Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

   3-e

   En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n, A et I.