DS 3 (durée 3h00)

Le sujet comporte 3 exercices et un problème indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Exercice de base 1 : Systèmes (4 points)

On considère le système (S) d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ suivant :

$$\begin{cases} (4-\lambda)x - y + z = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y + 2z = 0 \\ -x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce système dans le cas où $\lambda = 3$.
2. Résoudre ce système dans le cas où $\lambda \neq 3$ (on discutera suivant les valeurs de λ).

Exercice de base 2 : Dénombrement (9 points)

Chez les eucaryotes et les procaryotes, l'information génétique est entièrement contenue dans l'ADN. L'ADN est formé de deux brins en hélice eux-mêmes constitués d'une succession de nucléotides. L'ADN est d'abord transcrit en ARNm qui est à son tour traduit en une séquence d'acides aminés. Les nucléotides de l'ARNm sont de quatre type différents (A, U, C, G) en fonction de la base azotée qui les constitue (adénine, uracile, cytosine et guanine respectivement). Ces nucléotides sont traduits par groupe de trois par un ribosome qui parcourt le brin d'ARNm. Chaque groupe de trois nucléotides est appelé codon. Par exemple : AACGUCCCUUAA est un brins d'ARNm constitué des quatre codons AAC-GUC-CCU-UUA.

On appelle 7-brin un brin d'ARNm contenant 7 codons.

Tous les résultats doivent être justifiés par un raisonnement.

1. Combien peut-on former de codons différents ?
2. Combien de 7-brins peut-on former ?
3. Combien de 7-brins contenant 7 codons différents peut-on former ?
4. Combien de 7-brins commençant par un codon initiateur AUG (méthionine) et se terminant par UAA, UAG ou UGA peut-on former ?
5. Combien de 7-brins contenant au moins 2 codons différents peut-on former ?
6. Combien de 7-brins contenant exactement 2 codons différents peut-on former ?
7. Combien de 7-brins contenant 4 codons GAA (acide glutamique) et 3 codons CCU (proline) ?
8. Combien de 7-brins contenant 3 codons UAC (tyrosine), 2 codons UGG (tryptophane) et 2 codons ACA (thréonine) ?
9. Combien de 7-brins faisant apparaitre le codon AUA (isoleucine) pour la première fois en troisième position ?

Exercice de base 3 : Applications (7 points)

On note E l'ensemble $\mathbb{C}_3[X]$, c'est à dire l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. On note P' la dérivée du polynôme P

On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ par $f(P) = P - P', \forall P \in E$.

1. Calculer $f(X^3)$ et $f(X^2 - 1)$.
2. (a) Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2, f(P - Q) = f(P) - f(Q)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(P) = 0$ d'inconnue le polynôme P.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que f est injective.
   (d) L'application f est-elle surjective ?
   (e) L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer l'expression de sa réciproque.

Problème (23 points)

On pose F l'ensemble des fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : F \to F$ définie par

$$\varphi(f) = 2f'' + 6f' + 5f, \forall \varphi \in F$$

1. Montrer que $\forall (f, g) \in F^2, \varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$.
2. On définie f_1 sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = (x^2 + x + 1)e^{3x}, \forall x \in \mathbb{R}$.
   Calculer l'image de f_1 par φ.
3. On pose $f_2(x) = \cos(2x), \forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer une valeur $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{4}{\sqrt{17}} \sin(x) + \frac{1}{\sqrt{17}} \cos(x) = \cos(x + \theta)$.
   (b) En déduire que $\varphi(f_2)(x) = -3\sqrt{17} \cos(2x + \theta), \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer le ou les antécédents de 0 par φ.
   Que peut-on en déduire que l'application φ ?
5. (a) A l'aide d'une double primitive par partie, déterminer une primitive G de la fonction g définie par $g(x) = \sin(\frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$.
   (b) Résoudre l'équation $f'(x) + f(x) = \sin(\frac{x}{2})e^{-\frac{3x}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. Pour la recherche de la solution particulière, on pourra poser $f_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$ où λ est une fonction inconnue deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ à déterminer.
   (c) Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y''' + 8y'' + 11y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ comme valeurs initiales.
   On pourra poser $z(x) = y(x) + y'(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et chercher une nouvelle équation vérifiée par z.
6. On s'intéresse à présent à une situation physique : les oscillations d'un mobile fixé au mur par un ressort.
   Un mobile ponctuel B de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort sans masse de raideur k, de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixée au mur, au point O d'abscisse 0. Le point B peut se déplacer à l'horizontal sur l'axe (Ox) Il est repéré par son abscisse x (qui est une fonction du temps, noté t, mesuré en secondes). On soumet le point B à une force constante $\overrightarrow{F} = F_0.\overrightarrow{u_x}$.
   (a) Dessiner un schéma de la situation.

(b) Que représentent les fonctions x' et x'', respectivement dérivée première et seconde de la position du mobile, d'un point de vue physique ?

(c) i. Résoudre les trois équations différentielles :
$2x''(t) + 6x'(t) = 10$, $6x'(t) + 5x(t) = 10$ et $2x''(t) + 5x(t) = 10$.

ii. Tracer l'allure de la courbe pour chacune des fonctions obtenues. Laquelle semble le mieux représenter les oscillations du mobile autour d'un point d'équilibre. Que peut-on reprocher à ce modèle ?

(d) Si on suppose que le point B est soumis à une force de frottement fluide, et pour des valeurs appropriées des constantes, on trouve que x est solution de l'équation différentielle :

$$(E_p) : 2x''(t) + 6x'(t) + 5x = 10$$

Déterminer les solutions du problème, sachant qu'à l'instant initial, la position du mobile est égale à 3 et sa vitesse est nulle.

(e) On pose $h(t) = 3\cos(\frac{t}{2})e^{-\frac{t}{10}} + 2, \forall t \in [0; 4\pi]$. Écrire une fonction h en python, qui prend en argument t et qui renvoie la valeur de $h(t)$. (on importera les modules nécessaires dans le programme).