DS 4 (durée 3h30)

Le sujet comporte 3 exercices et 1 problème, 2 à 2 indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Exercice de base 1 : Statistiques (4 points)

Sur l'ile de Tralala, on a mesuré la quantité d'eau tombée au mois d'aout, au Sud et au Nord. Au sud, en moyenne, il est tombé 23mm d'eau chaque jour avec un écart-type de 4mm, tandis qu'au Nord il est tombé 20mm d'eau chaque jour, avec un écart-type de 6mm.

1. Redonner la définition d'une moyenne et d'un écart-type.
2. A l'aide des données, tracer un graphique permettant de visualiser et de comparer les moyennes et écart-types.
3. Peut-on conclure à une différence statistique entre les précipitations au Sud et au Nord de l'ile de Tralala ?

Domi est une habitante du sud de Tralala. Elle adore chanter, comme tous les habitants de Tralala. Un scientifique a observé que pendant le même mois d'aout, Domi a chanté en moyenne 10 minutes par jour, avec un écart type de 2 minutes. Il a également calculé que la covariance entre la quantité de précipitation au sud de l'ile de Tralala et le temps passé par Domi à chanter était égal à -6,4.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire reliant la quantité de précipitation au sud de Tralala et le temps de chant de Domi. Que pouvez-vous en conclure ?
2. Calculer les coefficients de la droite d'ajustement affine modélisant le nuage de points du graphe "quantité de précipitation (mm) en fonction du temps de chant (min)", en utilisant la méthode des moindres carrés.

Exercice de base 2 : Polynômes (8 points)

1. Trouver l'expression développée et réduite d'un polynôme de degré 3 dont les racines sont $(-1; 2+i; 2-i)$.
2. On pose $Q(X) = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 28X - 24$. Montrer que 2 est une racine multiple de Q. Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser $P(X) = X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
4. (a) On pose $R(X) = (2+2c)X^2 + (18-6c)X + (8+c^2)$. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle de c pour laquelle R possède une racine double.

   (b) On pose $P(X) = X^4 - 6X^3 + 7X^2 - 18X - 8$. Trouver un polynôme Q tel que $deg(Q) = deg(P - Q^2) = 2$ et $P - Q^2$ possède une racine double.

   (c) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice de base 3 : Suites (8 points)

1. On considère les suite (x_n), (y_n) et (w_n) définies par :

$$x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 8 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - (\sqrt{2}+1)x_{n+2} + (\sqrt{2}+1)x_{n+1} - x_n = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$$

$$w_0 = 3, w_1 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - \sqrt{2}w_{n+1} + w_n = 0$$

   (a) Exprimer w_n en fonction de n.

   (b) Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par (y_n) et en déduire l'expression de y_n en fonction de n.

   (c) On note $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\frac{\pi}{4})$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\frac{\pi}{4})$ et $T_n = C_n + iS_n$ pour tout n entier naturel.
   Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\frac{\pi}{4}) = a\cos(\frac{n\pi}{8})\sin(\frac{(n+1)\pi}{8})$ où a est un réel à déterminer.

   (d) Donner l'expression de x_n en fonction de n.

2. Écrire une fonction *suite* en PYTHON permettant de calculer le terme de rang n de la suite (x_n), en utilisant la définition par récurrence de (x_n). On utilisera une liste X pour stocker les termes de la suite.

Problème : Matrices semi-magiques (20 points)

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on désignera par $M[i;j]$ l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de M.
On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe un réel σ_M vérifiant

$$\forall i \in [|1;n|]; \sum_{j=1}^{n} M[i;j] = \sigma_M \text{ et } \forall j \in [|1;n|]; \sum_{i=1}^{n} M[i;j] = \sigma_M$$

On appelle matrice symétrique, une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie ${}^tS = S$.
On appelle matrice antisymétrique, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie ${}^tA = -A$

1. Montrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est semi-magique.

2. Montrer que E est inversible, calculer son inverse et montrer que son inverse est également semi-magique.

3. (a) On pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est semi-magique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $MV =^t MV = \lambda V$. Donner λ en fonction de σ_M.

   (b) En déduire que si A et B sont semi-magiques d'ordre 3 et si $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, alors les matrices $\alpha A + \beta B$, AB et ${}^tA$ sont semi-magiques d'ordre 3. On donnera $\sigma_{\alpha A+\beta B}$, σ_{AB} et $\sigma_{{}^tA}$ en fonction de σ_A et σ_B.

(c) On note J_3 la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Vérifier que la matrice J_3 est semi-magique.

(d) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice J_3^p.

(e) Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est semi-magique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J_3 M = M J_3 = \lambda J_3$. Donner λ en fonction de σ_M.

(f) Montrer que si A est semi-magiques d'ordre 3 et inversible alors la matrice A^{-1} est semi-magique d'ordre 3.

4. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice semi-magique. On suppose qu'il existe S une matrice symétrique et A une matrice antisymétrique telles que $M = A + S$. exprimer S et A en fonction de M et de ${}^tM$. En déduire que S et A sont semi-magiques.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice semi-magique. Montrer que M peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique semi-magique et d'une matrice antisymétrique semi-magique.

(c) Montrer que les matrices semi-magiques antisymétriques d'ordre 3 sont toutes les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & b & -b \\ -b & \lambda & b \\ b & -b & \lambda \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$$

5. Informatique :

Dans cette partie, on modélise une matrice A par la liste des listes des coefficients en ligne.

Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est codée $A = [[1, 2], [3, 4]]$ en PYTHON.

L'instruction $A[i][j]$ permet d'extraire le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne.

(a) Écrire une procédure $affiche$ qui prend en argument une liste de listes et qui l'affiche sous la forme habituelle d'une matrice (on supposera que l'utilisateur donne une liste correspondant à la modélisation d'une matrice carrée de taille quelconque).

(b) Écrire une fonction *test_magique* qui indique si une liste de listes donnée en argument par l'utilisateur correspond à une matrice semi-magique ou non.