DS 5 (durée 3h30)

Le sujet comporte 3 problèmes, 2 à 2 indépendants. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème 1 : Fonctions et Suites

1. On pose $h(x) = e^x - x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les variations de h ainsi que ses limites.
   (b) En déduire que $0 < \frac{e^x-1}{x} < 1, \forall x \in R_-^*$ et que $1 < \frac{e^x-1}{x}, \forall x \in R_+^*$
2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\frac{e^x-1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}*$ et $f(0) = 0$.
   (a) Déterminer la limite de $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} f(x)$. Que peut-on en déduire sur f en 0 ?
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$.
3. On pose $g(x) = xe^x - e^x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$
   (a) Etudier les variations de la fonction g.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ puis le tableau de variations de f (limites comprises).
4. On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = f(-x)$.
   (c) Montrer que : (u_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

   (a) Écrire un programme PYTHON, permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier nature pour lequel $u_n < 0.001$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Problème 2 : Probas et Matrices

Un météorologue a observé que dans la ville où il habite :
— S'il fait beau deux jours d'affilé, alors le jour d'après, il fait beau avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
— S'il fait beau un jour et qu'il pleut le suivant, alors le jour d'après il fait beau avec une probabilité de $\frac{1}{2}$
— S'il pleut un jour et qu'il fait beau le suivant, alors le jour d'après il fait beau avec une probabilité de $\frac{1}{2}$
— S'il pleut deux jours d'affilé, alors le jour d'après il fait beau avec une probabilité de $\frac{1}{3}$

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "il fait beau le n-ème jour". On suppose que les deux premiers jours, il fait beau, c'est à dire $P(A_1) = P(A_0) = 1$.

1. Calculer la probabilité qu'il fasse beau les 4 premiers jours et qu'il pleuve le cinquième.
2. On sait qu'il a plu le cinquième jour. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau les quatre premiers jours ?
3. On note $E_n = A_{n-1} \cap A_n$, $F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, $G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n}$, $H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

(a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, $P(E_{n+1}) = \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F(n))$ (on admettra que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements).

(b) Exprimer de la même façon $P(F_{n+1}), P(G_{n+1}), P(H_{n+1})$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2.

4. Pour $n \geq 2$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$ on pose également $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer un réel a tel que $U_{n+1} = aMU_n$ pour tout $n \geq 2$.

(b) on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

(c) On pose $D = \frac{1}{10}QMP$. Montrer que D est une matrice diagonale.

(d) Montrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$.

(e) Montrer par récurrence que $U_n = aM^{n-2}U_2, \forall n \geq 2$.

(f) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n et en déduire $P(E_n), P(F_n), P(G_n), P(H_n)$.

(g) Calculer les limites de $P(E_n), P(F_n), P(G_n), P(H_n)$ en $+\infty$.

Problème 3 : Estimation de la taille d'une population

Dans le but d'estimer la taille d'une population N d'animaux (N est inconnu), on capture simultanément a animaux que l'on marque puis que l'on relâche parmi les autres. Quelque temps plus tard, on effectue un deuxième prélèvement permettant l'estimation. On compare dans ce problème deux méthodes.

1. Dans cette première méthode, on capture au hasard et simultanément n animaux. On suppose que $N \geq n \geq a$ et que $N > n + a$.

(a) Déterminer l'univers de cette expérience et son cardinal.

(b) Soit $k \in [|0; a|]$. Déterminer la probabilité $P(A_N)$ que k animaux soit marqués dans l'échantillon de n animaux prélevés.

(c) Montrer que $\frac{P(A_N)}{P(A_{N-1})} = \frac{(N-a)(N-n)}{N(N-a-n+k)}$.

(d) Déterminer le signe de $\frac{P(A_N)}{P(A_{N-1})} - 1$ et en déduire qu'il existe une ou deux valeurs de N pour laquelle la probabilité $P(A_N)$ est maximale.

2. Dans cette deuxième méthode, on capture au hasard successivement n animaux, en les relâchant à chaque fois.

(a) Déterminer l'univers de cette expérience et son cardinal.

(b) Déterminer la probabilité $P(B_N)$ que k animaux soit marqués dans l'échantillon de n animaux prélevés.

(c) Étudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x-a)^{n-k}}{x^n}$ définie sur $]a; +\infty[$.

(d) En déduire que la probabilité $P(B_N)$ est maximale si $N = \lfloor \frac{an}{k} \rfloor$ ou si $N = \lfloor \frac{an}{k} \rfloor - 1$

3. Que peut-on dire de ces deux méthodes ?

4. Estimer la population de vairons dans un lac sachant que 200 ont été marqués et que lors de la capture de 150 vairons, 15 étaient marqués.