Synthèse Espace vectoriel K^n

Soit n, p des entiers naturels.

Définition :L'ensemble des n-uplets de $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^n$. Un élément de $\mathbb{K}^n$ est appelé un vecteur. Un élément de $\mathbb{K}$ s'appelle un scalaire.

Définition : On munit l'ensemble $\mathbb{K}^n$ de deux opérations :

1. L'addition de deux éléments de $\mathbb{K}^n$ définie par :
   $\forall (x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)) \in (\mathbb{K}^n)^2, x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
2. La multiplication d'un élément de K^n par un scalaire, définie par :
   $\forall x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$

Propriété :- Définition :

$\mathbb{K}^n$ muni de l'addition de deux vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes, qui caractérisent les $\mathbb{K} - ev$.

1. L'addition de deux vecteurs est une loi de composition interne, c'est à dire que la somme de deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On dit aussi que $\mathbb{K}^n$ est stable par addition.
2. L'addition de deux vecteurs est associative.
3. Il existe un élément, noté $0_{\mathbb{K}^n}$, tel que $\forall x \in \mathbb{K}^n, x + 0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n} + x = x$ Cet élément est appelé neutre de K^n pour l'addition. Il est unique.
4. Pour tout vecteur x de $\mathbb{K}^n$ il existe un opposé(ou symétrique pour l'addition), noté $-x$, tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0_{\mathbb{K}^n}$. L'opposé d'un vecteur est unique.
5. L'addition est commutative.
6. La multiplication d'un vecteur par un scalaire est une loi de composition externe, c'est à dire que le produit est un vecteur de $\mathbb{K}^n$.
7. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in \mathbb{K}^n, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
8. Pour tout élément $x \in \mathbb{K}^n$, $1.x = x$.
9. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in \mathbb{K}^n, (\lambda + \mu).x) = \lambda.x + \mu.x$.
10. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in \mathbb{K}^{n2}, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Dans la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous ensemble de E.

Définition : On dit que F est un sous espace vectoriel de E si :
— F est non vide
— Pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y$ appartient à F.
— Pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F, le vecteur λx appartient à F.

Propriété : Un sous espace vectoriel est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Propriété :(caractérisation des sous espaces vectoriels) F est un sous espace vectoriel si :

1. F est non vide.
2. $\forall (x,y) \in F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Propriété :L'intersection de deux sous espaces vectoriels de E est un espace vectoriel.

Propriété : Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

Propriété :L'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène (ou d'un système d'équations linéaires homogènes) à n inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Définition :un p-uplet $(e_1, e_2, ..., e_)$ de vecteurs de E est appelé une famille finie de p vecteurs de E.

Définition : Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire d'une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de vecteurs de E s'il existe p scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille $(e_1, ..., e_p)$ est noté $Vect(e_1, e_2, ..., e_p)$.

Propriété : Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
L'ensemble $vect(e_1, e_2, ..., e_p)$ des combinaisons linéaires de cette famille est un sous espace vectoriel de E. On l'appelle le sous espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_p)$.

Définition : Une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de p vecteurs de E est dite génératrice de E si pour tout x vecteur de E, il existe p scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i$.
On a alors $E = vect(e_1, e_2, ..., e_p)$.

Propriété : On note $F = vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.
On ne change pas l'espace engendré F si :
- On change l'ordre des vecteurs de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$.
- On ajoute à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.
- on multiplie un vecteur de la famille par un scalaire non nul.
- on ajoute à la famille un nombre finie de vecteurs de F.
- On enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
- On enlève le vecteur nul.

Définition : Une famille $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est libre si pour tout p-uplet de scalaires $\lambda_1, ...\lambda_p$ on a : $\sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Propriété :

1. Si une famille est liée alors en changeant l'ordre des vecteurs la famille reste liée.
2. Une famille qui ne contient qu'un vecteur est liée si et seulement si ce vecteur est nul.
3. Une famille qui contient deux vecteurs $(e_1; e_2)$ est liée si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, c'est à dire si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e_1 = \lambda e_2$ ou $e_2 = 0_E$.
4. La famille est liée si et seulement si un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Propriété :

1. Si une famille est libre, elle le reste lorsqu'on change l'ordre.
2. Si une famille est libre, toute sous famille de cette famille reste libre.
3. Si une famille est libre et si deux vecteurs x et y de $vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ sont égaux alors les scalaires de la combinaison linéaire sont égaux.

Définition : Une famille finie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E. Autrement dit si tout élément de E peut se décomposer en une unique combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ie

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n), x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$$

les scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Définition : Un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice. Un espace qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie.

Propriété :- Définition :(admis) Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ alors E admet une base. De plus, toute les bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de E et noté $dim(E)$. Par convention, la convention du singleton $\{0\}$ vaut 0.

Dans la suite E un espace de dimension finie n.

Propriété :(admis) : Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille libre de E. Alors il existe $(e_{p+1}, ..., e_n)$ tel que la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

Propriété :(admis) :.

1. Toute famille libre possède au plus n éléments.
2. Toute famille libre de n vecteurs est une base.
3. Une famille qui possède strictement plus de n vecteurs est liée.

Propriété :(admis) :

1. Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.
2. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

3. Aucune famille de strictement moins de n vecteurs n'est génératrice.

Propriété :(admis) : Soit F un sous-espace vectoriel de E alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$ avec égalité ssi $F = E$.

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle droite vectoriel de E tout sous espace vectoriel de E de dimension 1 et plan vectoriel de E tout sous espace vectoriel de E de dimension 2. On appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de dimension $n-1$.

Définition : Soit $(v_1, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle rang de la famille, la dimension r du sous espace vectoriel $vect(v_1, ..., v_p)$.